समीकरण-मीमांसा

लेखक

स्वर्गवासी पं० सुधाकर द्विवेदी,

सम्पादक

पद्माकर द्विवेदी

प्रकाशक

विज्ञान परिषत्, प्रयाग

विषय-सूची

नोट:—पृष्ठ २०६ पर 'परिच्छिन्न मूल' की जगह समीकरण के मूलों का आनयन चहिए।

चतुर्घात समीकरण वाले अध्याय पर कोई संख्या नहीं है इसलिए विषय सूची में संख्या नहीं दी गयी।

श्री जानकीवल्लभो विजयते ।

सम्पादककी भूमिका ।

भारतवर्ष में बीजगणित का अङ्कुर कब और पहिले कहां जमा यह अब स्पष्टरूप से जानना अत्यन्त कठिन है । तथापि जहां तक विचार से अनुभव होता है यह जान पड़ता है कि इस देश में लिखने की क्रिया प्रकट होने के पूर्व ही से बीजगणित का प्रचार था । पहिले के लोग जो कि अक्षरों के सङ्कत से अपरिचित थे अव्यक्त पदार्थों के मानने के लिये जुदे जुदे रङ्गों की गोलिओं का व्यवहार करते थे जब पीछे से लिखने की क्रिया प्रचलित हुई तब बीजगणित की पोथिओं में उन्ही रंगों के सूचक शब्दों का व्यवहार होने लगा जैसा कि संस्कृत के बीजगणितों में अव्यक्तों के मान मानने के लिये जो यावत्तावत्, कालक, नीलक, पीतक, लोहितक, श्वेतक, चित्रक, कपिलक, पिंगलक, पाटलक, धूम्रक, श्यामलक, मेचक इत्यादि शब्द रक्खे हैं उनसे स्पष्ट है । जिसकी रचना काल का अनुसन्धान अभी तक स्पष्ट रूप से नहीं हो सका है ऐसे आर्षग्रन्थ सूर्यसिद्धान्त के देखने से यही अनुमान होता है कि बीजगणित भारतवर्ष में ही पहिले उत्पन्न हुआ फिर यहीं से सर्वत्र फैला है । क्योंकि कोणशङ्कु (the Sine of the altitude of the sun when situated in the vertical circle of which the Azimuth distance is 45°) के आनयन के लिये इस ग्रन्थ में यह सूत्र

'त्रिज्यावर्गार्धतोऽग्रज्यावर्गोनाद् द्वादशाहतात् ।
पुनर्द्वादशनिघ्नाच्च लभ्यते यत् फलं बुधैः ॥
शङ्कुवर्गार्धसंयुक्तविषुवद्वर्गभाजितात् ।
तदेव करणी नाम तां पृथक् स्थापयेद्बुधः ।

अर्कघ्नी विषुवच्छायाग्रज्यया गुणिता तथा ।
भक्ता फलाख्यं तद्वर्गसंयुक्तकरणीपदम् ॥
फलेन हीनसंयुक्तं दक्षिणोत्तरगोलयोः ।
याम्ययोर्विदिशोः शङ्कुरेवं याम्योत्तरे रवौ ॥
परिभ्रमति शङ्कोस्तु शङ्कुरुत्तरयोस्तु सः ।

लिखा है जिसका अर्थ है कि त्रिज्या के वर्ग के आधे में अग्रा का वर्ग घटा कर शेष को १२ से गुण कर फिर १२ से गुण दो । इस गुणनफल में शङ्कुवर्ग के आधे अर्थात् ७२ युत पलभावर्ग से भाग दो । इससे जो भजनफल पाया जाय उसको करणी कह परिडत इस करणी को अलग लिख रक्खे । फिर १२ गुना पलभा को अग्रा से गुणने से जो गुणनफल हो उसमें उसी का अर्थात् ७२ युत पलभावर्ग का भाग दो । इस लब्धि को फल कहो । इस फल के वर्ग से युत करणी के वर्गमूल में से उस फल को यदि सूर्य दक्षिण गोल में हो तो घटाओ और यदि सूर्य उत्तर गोल में हो तो जोडो । यही फल कोणशङ्कु होता है । इस सूत्र की उपपत्ति बीजगणित के बिना हो ही नहीं सकती । इस बात की सत्यता प्रकट करने के लिये यहाँ ऊपर लिखे हुए सूत्र की उपपत्ति पाठकों के अवलोकनार्थ नीचे दी जाती है:—

मान लो कि य = कोणशङ्कु प = पलभा (the equinoctial shadow)

अ = अग्रा (the sine of the amplitude)

क = करणी और फ = फल

तब $१२ : प :: य : \frac{प}{१२}$ य = शङ्कुतल

यदि दक्षिण गोल में सूर्य हो तो शङ्कुतल में अग्रा जोड़ देने से और यदि उत्तर गोल में हो तो घटा देने से भुज (the sine of the difference between the sun's place and the prime vertical) बनता है ।

$\therefore \frac{प}{१२} य \pm अ = भुज$

परन्तु जब कोणवृत्त में सूर्य रहता है तब उसका जितना अन्तर सममण्डल (the prime vertical circle) से रहता है उतना ही याम्योत्तर वृत्त (meridian) से रहता है। इस लिये तब दृग्ज्या (the sine of the zenith distance) अर्थात् नतांशों की ज्या कर्ण (hypotenuse) होती है। भुज और कोटि ये दोनों

$\frac{प}{१२} य \pm अ$ इस भुज के तुल्य होते हैं।

$\therefore दृग्ज्या^{२} = २\left(\frac{प}{१२} य \pm अ\right)^{२} = २\left(\frac{प^{२}}{१४४} य^{२} \pm \frac{प.य.अ}{६} + अ^{२}\right)$

$= \frac{प^{२}}{७२} य^{२} \pm \frac{प.य.अ}{३} + २ अ^{२}$ ।

परन्तु $शंकु^{२} + दृग्ज्या^{२} = त्रिज्या^{२}$

$\therefore य^{२} + \frac{प^{२}}{७२} य^{२} \pm \frac{प.य.अ}{३} + २ अ^{२} = त्रि^{२}$

छेदगम से $७२ य^{२} + प^{२} य^{२} \pm २४ य प अ + १४४ अ^{२} = ७२ त्रि^{२}$

वा $(प^{२} + ७२) य^{२} \pm २४ अ प य = ७२ त्रि^{२} - १४४ अ^{२}$

$(प^{२} + ७२)$ इसका दोनों पक्षों में भाग दे देने से

$$य^{२} \pm \frac{२४ अ प}{य^{२} + ७२} य = \frac{७२ त्रि^{२} - १४४ अ^{२}}{प^{२} + ७२} = \frac{१४४\left(\frac{त्रि^{२}}{२} - अ^{२}\right)}{प^{२} + ७२}$$

$$वा य^{२} \pm २ य\left(\frac{१२ अ}{प^{२} + ७२}\right) = \frac{१२ \times १२\left(\frac{त्रि^{२}}{२} - अ^{२}\right)}{प^{२} + ७२}$$

यहां श्लोक के अनुसार $\frac{१२ \times १२(\frac{त्रि^२}{२} - अ^२)}{प^२ + ७२}$ इसकी करणी संज्ञा और $\frac{१२ अ}{प^२ + ७२}$ इसकी फल संज्ञा की गई है।

$\therefore य^२ \pm २ फय = क$

वा $य^२ \pm २ फ य + फ^२ = फ^२ + क$

मूल लेने से $य \pm फ = \sqrt{फ^२ + क}$

$\therefore य = \sqrt{फ^२ + क} \mp फ$

यहाँ फलवर्गयुत करणी के वर्गमूल में से जब सूर्य दक्षिण गोल में हो तो फल को घटाओ और जब उत्तर गोल में हो तो जोड़ दो।

यदि $\sqrt{फ^२ + क}$ इस व्यक्त पक्ष का मूल ऋण मानो तो दोनों गोल में शङ्कुमान ऋण होगा अर्थात् तब सूर्य क्षितिज के नीचे कोणवृत्त में आवेगा।

ऊपर की क्रिया से यह स्पष्ट है कि भारतवर्ष में सूर्यसिद्धान्त के रचनाकाल के पूर्व ही से बीजगणित का प्रचार भली भांति था।

बीजगणित के समीकरणों में अव्यक्त पदार्थ के मान मानने के लिये सभी रंगवाची शब्दों ही का प्रयोग किया गया है। केवल प्रथम शब्द यावत्तावत् रंगवाची न होने से चित्त में कुछ शङ्का उत्पन्न होती है। संस्कृत में यावक महावर को कहते हैं जो कि लाह से बना हुआ लाल रंग का होता है। मंगल कार्यों में पुरुष और स्त्रियों के पैर इससे रँगे जाते हैं और पैर के नहों में भी इसी को भर देते हैं। रंगवाची ही सब शब्दों के प्रयोग से निश्चय होता है कि पहिले के लोगों ने यावक ही को ग्रहण किय था पीछे से भास्करादिकों ने इसके स्थान में लेखक-दोष से

अथवा स्वयं अपनी इच्छा से यावत्तावत् को रक्खा। क्योंकि पृथूदक चौबे की की हुई ब्रह्मगुप्त के सिद्धान्त की टीका में यावत्तवात् के स्थान में यावक ही मिलता है। भास्कराचार्य ने अपने बीजगणित के अनेकवर्णसमीकरण में ऊपर के अव्यक्त सूचक शब्दों को लिख कर यह भी कहा है कि अथवा आपस में जिसमें सब मान न मिल जायँ इस लिये अव्यक्त के मानों के लिये चाहो तो क, ख, ग इत्यादि अक्षरों ही को रक्खो।

यूरप में थोड़े समय से अब समीकरणों में य के स्थान में भिन्न भिन्न अव्यक्तों के उत्थापन देने का विशेष कर के प्रचार हुआ है जिससे बहुत ही सीधा समीकरण हो जाता है और बड़े लाघव से उत्तर निकल आता है। परन्तु यह बात ध्यान देने योग्य है कि भारतवर्ष में हज़ारों वर्ष पहिले से उत्थापन का यह प्रकार चला आता है जिससे बड़े कठिन प्रश्न भी सहज में हो जाते हैं। यही कारण है कि यहाँ के आचार्यों ने अव्यक्त पदार्थ के मान मानने के लिये यावत्तावत्, कालक, नीलक इत्यादि इतने शब्दों का प्रयोग किया है। अपने बीजगणित में भास्कराचार्य लिखते हैं कि

ब्रह्माह्वयश्रीधरपद्मनाभबीजानि यस्मादतिविस्तृतानि।
आदाय तत्सारमकारि नूनं सयुक्तियुक्त लघु शिष्यतुष्टयै॥

अर्थात् ब्रह्मगुप्त, श्रीधर और पद्मनाभ के बीजगणित बहुत विस्तृत हैं, इसलिये उनमें से उत्तम उत्तम पदार्थों का संग्रह कर विद्यार्थियों के संतोष के लिये मैं ने इस छोटे बीजगणित को बनाया है। ऊपर के श्लोक से स्पष्ट है कि भारतवर्ष में अनेक विद्वानों के बीजगणित की पोथिआँ थीं पर कालवश से वे सब प्रायः नष्ट हो गईं। केवल ब्रह्मगुप्त के बीजगणित का कुछ भाग मला है जिसका अंगरेजी अनुवाद कोलब्रूक महाशय का किया

हुआ विद्वानो में प्रसिद्ध है। इस बीजगणित को ब्रह्मगुप्त ने शक ५५० अर्थात् सन् ६२८ ई० में बनाया है। उसमें वर्ग समीकरण के तोड़ने के लिये उसी युक्ति को लिखा है जो आज तक सर्वत्र प्रचलित है। जो लोग संस्कृत नहीं जानते केवल अंगरेजी भाषा से परिचित हैं उन्हे चाहिए कि कोलब्रूक महाशय का किया हुआ उसका अंगरेजी अनुवाद देखें।

अपने बीजगणित के मध्यमाहरण में भास्कराचार्य लिखते हैं "न निर्वहश्चेद् धनवर्गवर्गेष्वेवं तदा ज्ञेयमिदं स्वबुद्ध्या" अर्थात् घन और चतुर्घात समीकरणों में अपनी बुद्धि से विचारो कि किससे गुणें, क्या जोड़ें जिसमें मूल मिले अथवा अपनी बुद्धि ही से अटकल करो कि समीकरण में अव्यक्त का मान क्या है। इस वाक्य से स्पष्ट है कि पूर्व आचार्यों के बीजगणित में घन और वर्ग-वर्ग अर्थात् चतुर्घात समीकरणों के तोड़ने की युक्ति नहीं लिखी थी। यदि ऐसी युक्तियाँ होती तो भास्कर अवश्य अपने बीजगणित में लिखते।

जिन समीकरणों में अव्यक्त के अनेक मान सम्भाव्य और अभिन्न धन आते हैं उन समीकरणों ही के ऊपर भारतवर्ष के प्राचीन आचार्यों का विशेष रूप से ध्यान था। इसीलिये अनेक वर्णमध्यमाहरण और भावित ये पृथक् पथक् दो अध्याय उनके बीजों में लिखे गए। अवयक्त के जिन मानो का उदाहरण लोक व्यवहार में दिखलाया जाना संभव था उन्हीं मानों पर भास्करादिकों का ध्यान विशेष था और जिन ऋण संख्याओं का लोक में व्यवहार नहीं हो सकता था अवयक्तमान आने पर भी ये लोग उन संख्याओं का ग्रहण नहीं करते थे। यही कारण है कि वर्गसमीकरण में अव्यक्त के सर्वदा दो मानों में से ऋण मान को लोक में व्यवहार न होने से अस्वीकार करते हुए भास्कर ने पद्मनाभ के—

व्यक्तपक्षस्य चेन्मूलमन्यपक्षर्णरूपतः ।
अल्पं धनर्णगं कृत्वा द्विविधोत्पद्यते मितिः ॥

इस सूत्र का खण्डन ही कर डाला ।

निदान ऋण संख्या पर विशेष ध्यान न देने से और गणित-लाघव के लिये विशेष साङ्केतिक चिन्ह न बनाने से भारतवर्ष के प्राचीन गणितज्ञ वर्गसमीकरण के आगे घनसमीकरणादिकों में विशेष विचार न कर सके केवल भास्कराचार्य ने घनसमीकरण का एक उदाहरण $य^3 + १२य = ६ य^2 + ३५$ यह देते हुए इसके उत्तर के लिये लिखा है कि ऐसे उदाहरणों के उत्तर के लिये कोई विधि नहीं । अपनी बुद्धि बल से कुछ जोड़, घटा कर उत्तर निकालो । उन्हों ने नीचे लिखे हुए प्रकार से उत्तर निकाला है:—

$य^3 + १२ य = ६ य^2 + ३५$
दोनों पक्षों में $(६^2 + ८)$ इसको घटा देने से
$य^3 - ६य^2 + १२ य - ८ = २७$
$वा (य - २)^3 = (३)^3$

घनमूल लेने से $य - २ = ३ \therefore य = ५$

बस य का यही एक मान निकाल कर रह गए हैं । आगे और दो मानों के विषय में कुछ भी नहीं लिखा है । अव्यक्त के और दो मानों के लिये इसी ग्रन्थ का २०८ पृष्ठ देखिए ।

प्राचीन काल से अरब और ग्रीस देश के लोग किसी न किसी व्याज से भारतवर्ष में आया जाया करते थे । अधिक मेल जोल हो जाने से उन लोगों ने बहुत बातें हिन्दुओं से और हिन्दुओंने बहुत बातें उन लोगों से सीखीं ।

ऐसा कहा जाता है कि अलमामून खलीफा (८१३—८३३ ई०) के राज्यकाल में रहने वाले मुहम्मद बिन अल ख्वारेज्मी राजशाही दूतों के संग अफ़गानिस्तान गए और लौटती समय भारतवर्ष से

होते हुये आए। आने के थोड़े ही समय के बाद सन् ८३० ई० में इन्होंने बीजगणित की एक पोथी लिखी। इस पोथी के विषय इन्हीं के आविष्कार किए हुये नहीं मालूम पड़ते वरन् भारतवर्ष ही के ब्रह्मगुप्त, भट्ट बलभद्र या और किसी विद्वान् के बीजगणित से अनुवाद किए गए हैं या उसके आधार पर लिखे गए हैं।

भारतवर्ष में बीजगणित से (१) एक वर्णसमीकरण (२) अनेक वर्णसमीकरण (३) मध्यमाहरण और (४) भावित ये चार प्रकार के समीकरणों ही को लेते हैं। भास्कराचार्य ने भी लिखा है कि 'प्रथम-मेकवर्णसमीकरणं बीजम्। द्वितीयमनेकवर्णसमीकरणं बीजम्। यत्र वर्णस्य द्वयोर्वा बहूनां वर्गादिगतानां समीकरणं तन्मध्यमाहरणम्। भावितस्य तद्भावितमिति बीजचतुष्टयं वदन्त्याचार्याः'।

दिए हुए तुल्य समीकरणों में से अव्यक्त और व्यक्तों को किस प्रकार से एक एक पक्ष में रख कर अव्यक्त के मानों को ले आना इसके लिये ब्रह्मगुप्त लिखते हैं:—

अव्यक्तान्तरभक्तं व्यस्तं रूपान्तरं समेऽव्यक्तः।
वर्गाव्यक्ताः शोध्या यस्माद्रूपाणि तदधस्तात्॥

इस पर पूज्यपाद पिताजी की टीका है—'समे एकवर्ण समीकरणे व्यस्तं रूपान्तरमव्यक्तान्तरभक्तमव्यक्तमानं व्यक्तं भवेत् यत्पक्षादव्यक्तमानादन्यपक्षाव्यक्तमानं विशोध्याव्यक्तान्तरं साध्यते तत्पक्षस्थरूपाण्यन्यपक्षरूपेभ्यो विशोध्य यच्छेषं तद्व्यस्तं रूपान्तरमित्यर्थः। यस्मात्पक्षादव्यक्तो वर्गाव्यक्ता अव्यक्तवर्गश्च विशोध्यस्तदधस्तादितरपक्षाद्रूपाणि विशोध्यानि। एवमेकपक्षेऽव्यक्तवर्गोऽव्यक्तश्च। अपरपक्षे च व्यक्तानि रूपाणि। अर्थात् जिस पक्षवाले अव्यक्त में से दूसरे पक्षवाले अव्यक्त को घटा कर अव्यक्त का अन्तर साधन करते हैं उसी पक्ष के व्यक्त को दूसरे पक्षवाले व्यक्त में घटा कर जो शेष बचे उसमें अव्यक्त के अन्तर का भाग देने से

अव्यक्त का मान व्यक्त हो जाता है। जिस पक्ष से अव्यक्त और अव्यक्त वर्ग घटाए जाते हैं उस दूसरे पक्ष में व्यक्त को ले जाकर घटाना चाहिए। इस प्रकार एक पक्ष में अव्यक्त वर्ग और अव्यक्त और दूसरे पक्ष में व्यक्त रूप रह जाते हैं।

भास्कराचार्य भी इसी आशय को लेकर लिखते हैं:—
तुल्यौ पक्षौ साधनीयौ प्रयत्नात्त्यक्त्वा क्षिप्त्वा वापि संगुण्य भक्त्वा।
एकाऽव्यक्तं शोधयेदन्यपक्षाद्रूपाण्यन्यस्येतरस्माच्च पक्षात्।
शेषाव्यक्तेनोद्धरेद्रूपशेषं व्यक्तं मानं जायतेऽव्यक्तराशेः।

ऊपर कही हुई बातों को भली भाँति विचारने से यह स्पष्ट है कि अरब के ज्यौतिषिओं ने इसी लिये अपनी भाषा में बीज का अनुवाद अलजबर वल मुकाबिला किया। इस नाम के देखने से, अव्यक्त का बीज ही नाम रखने तथा अपनी बीजगणित की पोथिओं में वर्गसमीकरण के दोनों मूलों की चर्चा करने से यह दृढ़ अनुमान होता है कि अरब के ज्यौतिषिओं ने भारतवर्ष ही से पहिले पहिल बीजगणित का ज्ञान पाया था। क्योंकि ग्रीस देश का रहने वाला डायोफैण्टस (Diophantus) के बीजगणित में इन सब की कुछ भी चर्चा नहीं पाई जाती।

अरब के ज्योतिषी क्षेत्र रचना की युक्ति से वर्गसमीकरण को सिद्ध करना जानते थे। इसी युक्ति से इन लोगों ने घनसमीकरण को भी सिद्ध करने के लिये बहुत प्रयास किया। "किसी एक धरातल से किसी एक गोल को इस प्रकार से काटना कि उस गोल के दोनों खण्ड एक दी हुई निष्पत्ति में हों" इस प्रश्न को सब से पहिले बगदाद का रहने वाला अलमहानी ने एक घनसमीकरण के स्वरूप में प्रकट किया। यद्यपि इस प्रश्न को अलकुही, अलहसन बिन अल

हैतम् इत्यादिकों ने भी लिखा है तथापि अरब के ज्योतिषियों में स सब से पहिले इसकी उपपत्ति अबूजफर अल हाजिन ने की।

किसी समसप्तभुज क्षेत्र के भुज का ज्ञान $य^3 - य^2 - २ य + १ = ०$ इस घन समीकरण के आधीन था। बहुतों ने इसको सिद्ध करने के लिये प्रयत्न किया पर सब निष्फल हुआ। अन्तमें अबुलगूद ने इस घन समीकरण के तोड़ने की युक्ति निकाली। अन्तर खण्डित शङ्कुओं (by intersecting conics) की सहायता से सन् १०७९ ई० में उमर अल खय्यामी ने अनेक प्रकार के समीकरणों को सिद्ध करने को उत्तम विधियों को अपने बीजगणित में लिखा है परन्तु बीजगणित की सहायता से वास्तव में घनसमीकरण के तोड़ने की कोई युक्ति साधारणतः उस ग्रन्थ में नहीं दी गई है। क्षेत्ररचना ही की युक्ति से अबुल वफाने भी $य^4 = अ$, $य^4 + अ य^3 = ब$ इन समीकरणों को सिद्ध किया है। ईशा की तेरहवीं शताब्दि के आसन्न में यूरप के इटली नामक प्रान्त में पीज़ा का रहनेवाला लेनार्डो (Lenardo of Pisa) ने अरबी बीज को अपनी भाषा में अनुवाद किया। जिसके कारण इटली के लोग इस विषय में प्रधान गिने जाते हैं और जब तक संसार में विद्या का प्रचार रहेगा तब तक इस बात के लिये उन लोगों का आदर होता रहेगा। सन् १९९४ ई० में लूकसपैसिओलस (Lucus Paciolus) जो बुर्गो का लूकस १(Lucus de Burgo) इस नाम से प्रसिद्ध है उसने बीजगणित की एक पोथी लिखी जिसका नाम L'Arte Maggiore यह है। उस ग्रन्थ में अरबों के घनसमीकरण के ऊपर इस विद्वान् ने लिखा है कि जितनी बीजगणितीय विधियाँ आज तक ज्ञात हैं उनसे इन घनसमीकरणों का तोड़ना उसी प्रकार असंभव है जिस प्रकार एक वृत्तके तुल्य एक चतुर्भुज बनाना चत्र-युक्ति से असंभव है। लूकस की इस सूचना से गणितज्ञों का ध्यान

विशेष रूप से घनसमीकरण की ओर झुका । सीपिओ फेरियो (Scipio Ferreo) ने $य^३ + मय = न$ इस घनसमीकरण के तोड़ने के लिये एक विधि को निकाला परन्तु जनता में नहीं प्रकट किया। सन् १५०५ ई० में अपने एक शिष्य फ्लारिडा (Florido) को उसने उस विधि को बतला दिया।

एक बार कोला (Colla) ने गणितज्ञ टार्टाग्लिआ (Tartaglia) से एक प्रश्न पूछा जिसका उत्तर $य^३ + प य^२ = ब$ इस घनसमीकरण के अव्यक्त मान के आधीन था। इसलिये विचारते विचारते टार्टाग्लिआ ने इस घनसमीकरण के तोड़ने की युक्ति सन् १५३० ई० में निकाली। इस बात को सुन कर फ्लारिडो ने भी अपने गुरु की युक्ति को जो $य^३ + मय = न$ इस घनसमीकरण के तोड़ने के लिये सीखी थी प्रकाश किया। इसके प्रकाश होने पर सन् १५३५ ई० में टार्टाग्लिआ ने कहा कि फ्लारिडा की विधि ठीक नहीं है और शास्त्रार्थ करने के लिये फ्लारिडा को ललकारा भी। परन्तु पीछे से स्वयं उस विधि को ठीक समझ कर चुप हो गया। यह विधि वही है जिसे आज कल लोग कार्डन की रीति कहते हैं। अर्थात् फेरिओने $य^३ + म य = न$ इसके तोड़ने के लिये कल्पना की था कि $य = \sqrt[३]{र} - \sqrt[३]{ल}$ ऐसा है (११२ वाँ प्रक्रम देखो)।

पश्चात् टार्टाग्लिआ ने अरबों के घनसमीकरण तोड़ने के लिये कई एक प्रकार निकाले। कार्डेन ने उन प्रकारों को जानने के लिये उससे बहुत विनय की। अन्त में शपथ देकर कि उन प्रकारों को कहीं प्रकाश न करना टार्टाग्लिआ ने कार्डेन को अपना विश्वासयोग्य भक्त जन जान कर उन प्रकारों को बता दिया। कार्डेन ने उसके शपथ का कुछ भी ख्याल न कर सन् १५४५ ई० में अपने वृहद् ग्रन्थ (Ars Magna) आर्स मैगना में टार्टाग्लिआ

के सब प्रकारों को छपवा कर प्रकाश कर दिया। इसके बाद टार्टागिलया ने भी अपने सब प्रकारों को एक ग्रन्थके आकार में छपवाने की इच्छा प्रकट की और सन् १५५६ ई० में छपवाना भी आरम्भ कर दिया। परन्तु सन् १५५९ ई० में उसकी मृत्यु हो जाने से ग्रन्थ अधूरा ही छप कर रह गया। घनसमीकरण तोड़ने के सब प्रकार बिना छपे ही रह गए। कार्डेन ही के अनुग्रह से वे सब प्रकार विद्वानों को विदित होने के कारण कार्डेन के आदरार्थ उसी के नाम से वे सब प्रकार प्रसिद्ध किए गए।

इसके अनन्तर यूरप देशीय गणितज्ञों का विचार चतुर्घात समीकरण की ओर झुका। घनसमीकरण तोड़ने के लिये विद्वानों के बीच कोला ने जिस प्रकार आन्दोलन मचाया था उसी प्रकार $य^4 + 6 य^2 + 36 = 60 य$ इस चतर्घात समीकरण को तोड़ने के लिये आन्दोलन मचाया। कार्डेन ने ऐसे चतुर्घात समीकरण के तोड़ने की कोई रीति निकालने लिये बहुत प्रयास किया पर कुछ भी न कर सका। परन्तु उसके शिष्य फेरारी (Ferrari) ने इस बात में सफलता प्राप्त की और ऐसे समीकरण को तोड़ कर अव्यक्त के मान जानने का पकार भी निकाला (१२२वें प्रक्रम का (१) प्रकार देखो)। बाम्बेली (Bombelli) का बीजगणित सन् १५७९ ई० में छपा है। उसमें भी चतुर्घात समीकरण को तोडने का वही प्रकार लिखा है जो फेरारी ने निकाला था। बहुतों का मत है कि यह प्रकार बाम्बेली का निकाला हुआ है। बहुत लोग कहते हैं कि यह प्रकार सिम्सन् (Simpson) का निकाला है। जो हो पर सिम्सन् का बीजगणित बहुत पीछे सन् १७४० ई० के लगभग छप कर प्रकट हुआ।

सन् १६३७ ई० में बीज के ऊपर डेकार्ट (Descartes) एक ग्रन्थ लिखा है जिसमें अनेक नये प्रकार पाए जाते

हैं। जिनमें मुख्यतः समीकरण में अव्यक्त के धनर्णमान और असम्भव मान की मीमांसा और चिन्ह रीति हैं (८४ वाँ प्रक्रम देखो) डेकार्ट ने दो वर्गसमीकरण के गुणनफलरूप में एक चतुर्घात समीकरण को ले आने की युक्ति को भी दिखलाया है। यद्यपि यह युक्ति फेरारी के प्रकार से भी निकल आती है तथापि व्यवहार में उपयोगी है (१२४ वाँ प्रक्रम देखो)।

सन् १७७० ई० में आयलर (Euler) ने एक बीजगणित बना कर प्रकाश किया। उसमें चतुर्घात समीकरण तोड़ने के लिये उत्तम प्रकार दिखलाया गया है और साथ ही साथ सिद्ध किया गया है कि चतुर्घात समीकरण का तोड़ना एक घन-समीकरण के आधीन है अर्थात् यदि उस घनसमीकरण के अव्यक्त-मान विदित हो जायँ तो चतुर्घात समीकरण के अव्यक्तमान भी विदित हो सकते हैं (१२२ वाँ प्रक्रम देखो)। डेकार्ट और आयलर के प्रकारों को देख कर बहुतों की इच्छा हुई कि चतुर्घात से ऊपर के घातवाले समीकरण के तोड़ने का प्रकार निकालें। इसके लिये अठारहवीं शताब्दि तक प्रयत्न किया गया पर सब निष्फल हुआ। पश्चात् वाण्डरमाण्डे (Vandermonde) और लाग्राँञ्ज (Lagrange) ने भी क्रम से सन् १७७० और १७७१ ई० में इस विषय पर अत्यन्त उपयोगी बातों को अपने अपने लेखों में प्रकाश किए अन्त में आबेल (Abel) और वान्टसेल (Wantzel) ने सिद्ध किए कि चतुर्घात से अधिक घातवाले समीकरणों के तोड़ने की साधारण विधि बीजगणित की युक्ति से असम्भव है (the solution is not possible by radicals alone. Serret's Cours [d'Algebre, Superieure Art 516 देखो)।

तत्पश्चात् यूरप के अनेक विद्वान अनेक नये नये सिद्धान्तों को उत्पन्न किए और आज तक करते ही जाते हैं जिनके कारण

बीजगणितशास्त्र की उन्नति दिन दूनी और रात चौगुनी होती जाती है। उन्हीं कतिपय सिद्धान्तों के संग्रह से बीजगणित का यह समीकरणमीमांसा नाम का एक बड़ा ग्रन्थ हिन्दी भाषा में बन कर तयार हुआ है।

आसन्नमूल

स्वल्पान्तर से आसन्नमूल जनाने के लिये भारतवर्ष के आचार्यों ने बहुत प्राचीन काल से अनेक प्रकार निकाले हैं। परन्तु वे प्रकार ज्यौतिषसिद्धान्त के ग्रन्थों में प्रायः जीवा, कोटिज्या आदि सम्बन्धी समीकरणों ही में पाए जाते हैं (भास्कराचार्य्यकृत सिद्धान्तशिरोमणि के गणिताध्याय का त्रिप्रश्नाधिकार और सूर्य-ग्रहण के समय का लम्बनसाधन; कमलाकररचित सिद्धान्ततत्वविवेक ग्रन्थ के स्पष्टाधिकार में चाप के त्रिभागादि का ज्यानयन देखो)।

अरबी भाषा से अनभिज्ञ होने के कारण उनके ग्रन्थों के पढ़ने की योग्यता मुझ में नहीं है तथापि कमलाकर ने अपने ग्रन्थ तत्व-विवेक के स्पष्टाधिकार में चाप के त्रिभाग की ज्या के आनयन के लिये मिर्ज़ा उलूक बेग का जो प्रकार लिखा है उससे स्पष्ट है कि अरब के लोग भी इस आसन्न मूल के जानने के लिये अनेक यत्न में तत्पर थे। यूरप में सब से पहिले सन् १६०० ई० में वीटा (Vieta) ने आसन्नमूल जानने के लिये कुछ प्रकारों को लिखा। उसने निश्चय किया कि अवश्य कोई एक प्रकार ऐसा होगा जिससे बार बार क्रिया करने से व्यक्त संख्या के वर्गमूल और घनमूल की तरह किसी समीकरण के एक अव्यक्त मान के व्यक्त संख्या के सब स्थानीय अङ्क क्रम से आते जायँगे। इसके लिये वीटा ने जो प्रकार निकाला उसमें महा प्रयास करने पर अव्यक्त मान का पता लगता था। पीछे से हैरिअट् (Harriot), आउट्रेड (Oughtred), पेल (Pell) और अन्य लोगों ने भी जहाँ तक बना

वीटा के प्रकार को कुछ सीधा किया। सन् १६६९ ई० में न्यूटन ने आसन्नमूल के लिये अपनी रीति प्रकाश की (१४४ वाँ प्रक्रम देखो) तत्पश्चात् सिम्सन्, बर्नोली, लाग्रांज इत्यादिकों ने भी अपनी अपनी रीतियों को प्रकाश किए। परन्तु अन्त में सन् १८१९ ई० में हार्नर (Horner) ने इसके लिये जो रीति निकाली वही सब से बढ़कर हुई और वही अत्यन्त सुगम और लघु होने से सर्वत्र व्यवहार में प्रचलित हुई (१५४ वाँ प्रक्रम देखो)।

कनिष्ठफल

इस ग्रन्थ के १५ वें अध्याय में कनिष्ठफलों (Determinants) के अनेक सिद्धान्त लिखे हैं। इनकी चर्चा यूरप में बहुत है। गणित के नये ग्रन्थों में प्रायः लाघव के लिये गणितों के स्थान में कनिष्ठ-फल ही के रूप में सब वस्तु को लिखते हैं। इसी लिये इस कनिष्ठ-फल के विशेष उपयोगी सिद्धान्तों को पूज्यपाद पिताजी ने इस ग्रन्थ में समावेश कर दिया है।

यहां यह सूचित कर देना मैं उचित समझता हूँ कि वर्गप्रकृति के साधन में भास्कर ने जिसका नाम कनिष्ठफल रक्खा है उससे और इस ग्रन्थ के कनिष्ठफल से कोई सम्बन्ध ही नहीं है।

विशेषतः कनिष्ठफल के सिद्धान्तों को निकालने वाले यूरप के लोग हैं। सन् १६९३ ई० में इसकी चर्चा सब से पहिले लाइबनिट्स (Leibnitz) ने की। फिर सन् १७५० ई० में क्रामर (Cramar) ने इसके पदों के धन, ऋण का ज्ञान किया (१७९ वां प्रक्रम देखो) और १८ वीं शताब्दि के उत्तरार्ध में बेजू (Bezout), लाप्लास (Laplace), वाण्डरमाण्डे (Vandermonde) और लाग्रांज (Lagrange) भी इस विषय की उन्नति करते ही गए। १९ वीं शताब्दि में गाउस (Gauss) और कोशी (Cauchy) ने

इसको परमावधि तक पहुँचा दिए। इसका डिटर्मिनैन्ट्स Determinants यह नाम भी कोशी ही ने रक्खा है। पीछे से सन् १८-४१ ई० में जैकोबी (Jacobi) ने इसके सब सिद्धान्तों को संग्रह कर सब के उपकारार्थ क्रेले के मासिक पत्र Crelle's Journal में छपवा दिया।

उपसंहार

समीकरण-मीमांसा ग्रन्थ के इस स्वरूप में प्रकट होने का सारा सुयश श्रीमान् माननीय सर आरबर्न (Sir R. Burn C. S. I. I. C. S.) महोदय को है। क्योंकि आप ही की कृपा तथा सदुद्योग से इस ग्रन्थ की छपाई के निमित्त आँके हुए संपूर्ण व्यय २५००) रूपयों में से आधा व्यय ऐसे मितव्ययता के समय में भी संयुक्त प्रदेश की न्यायशीला गवर्नमेन्ट ने देकर गुणग्राहकता का आदरणीय उदाहरण दिखलाई है। साथ ही साथ शेष आधे व्यय को लगा इस ग्रन्थ को छपाकर प्रयाग की विज्ञानपरिषत्‌ने हिन्दी साहित्य की सच्ची सेवा का प्रशंसनीय परिचय दिया है।

स्वर्गवासी पूज्यपाद पिताजी की कीर्ति-लतिका के सुन्दर विषय सुगन्धयुत इस ग्रन्थ-पुष्प के प्रकट होने में जिन जिन महानुभावों ने जिस जिस प्रकार की सहायता की है उन सभी को मेरा हार्दिक धन्यवाद है।

कहुँ अल्प मेरी बुद्धि वश वा जनित नैननि दोष सों।
यहि ग्रन्थ सम्पादन त्रुटिन तिन छमहिँ सबहि अशेष सोँ॥
करिलें ग्रहण गुण दुग्ध केवल नीर अवगुण छोड़ि के।
पद्माकरहु बुध हंस सों विनती करत कर जोड़ि के॥

खजुरी, बनारस।   पद्माकर द्विवेदी।

श्रीजानकीवल्लभो विजयते

समीकरण-मीमांसा

जयति जगति रामः सर्वदा सत्यकामः
सकलवपुषि जीवः शोभते योऽप्यजीवः ।
तमिह हृदि निधाय स्वच्छयुक्तिं विधाय
वदति विविधभेदान् बीजजातानखेदान् ॥

१—उपयोगी गणित

प्रक्रम १—अव्यक्त राशि । जैसे २, २५, २५६, २५६७ इत्यादि को व्यक्ताङ्क, संख्या वा राशि कहते हैं उसी प्रकार य, $य^२$, $य^२ + क^२$, $य^२ + य र + र^२$ इत्यादि को बीजराशि वा अव्यक्तराशि कहते हैं ।

२—फल । किसी अव्यक्तराशि को उन अव्यक्तों का फल कहते हैं जो उस अव्यक्तराशि में रहते हैं ।

जैसे $क\ य^२ + ख\ य + ग$ इस अव्यक्तराशि में केवल य अव्यक्त है; इसलिये इसे य का फल कहेंगे और इस फल को लाघव से **फ** (य) से प्रकट करते हैं अर्थात्

फ (य)= $क\ य^२ + ख\ य + ग$ ।

इसी प्रकार $क\ य^३ + ख\ य^२\ र + ग\ य\ र^२ + घ\ र^३ + च$ इस अव्यक्तराशि में दो अव्यक्त हैं; इसलिये यह य और र का फल है ।

लाघव से उपर्युक्त राशि के लिये फ (य, र) लिखते हैं।

इसी प्रकार तीन, चार इत्यादि अव्यक्तराशिविशिष्ट अव्यक्तराशि में भी समझना चाहिए।

सर्वत्र अव्यक्तराशि में अव्यक्त को छोड़ और जो क, ख, ग इत्यादि अक्षर रहते हैं उन सब को व्यक्त समझना चाहिए।

अव्यक्तराशि के भिन्न भिन्न फलों को **फ, फा, फि, फी** इत्यादि अक्षरों से प्रकाश करते हैं, जैसे **फा** (य) से समझना चाहिए कि यह य का एक फल है जो कि **फ** (य) इस य के फल से भिन्न है।

३—किसी अव्यक्तराशि को ऐसा लिख सकते हैं जिस में प्रत्येक पद में किसी एक अव्यक्त का घात उत्तरोत्तर एक एक घटता वा बढ़ता रहे, जैसे

$$\text{कय}^{४} + \text{खय}^{२} + \text{ग} \text{ इस राशि को}$$

$$\text{कय}^{४} + ० \times \text{य}^{३} + \text{खय}^{२} + ० \times \text{य} + \text{ग}$$

ऐसा लिख सकते हैं यहाँ शून्य गुणकों के पूर्व जो धन चिन्ह लिखे हैं उनके स्थान में ऋण चिन्ह रख देने से भी अव्यक्तराशि में भेद न होगा; परन्तु ऐसे शून्य गुणकों के पूर्व प्रायः धन चिन्ह ही लिखते हैं।

४—पूर्णफल, पूर्णसमीकरण—जिस अव्यक्तराशि में प्रधान अव्यक्त के घात उत्तरोत्तर एक एक घटते वा बढ़ते रहते हैं उसे अव्यक्त का पूर्णफल कहते हैं, जैसे

$\text{कय}^{५} + \text{खय}^{४} + \text{गय}^{३} + \text{घय}^{२} + \text{चय} + \text{ज}$ इस अव्यक्तराशि को य का पूर्णफल कहेंगे।

इस पूर्णफल से बने हुए फ (य) = ० इस समीकरण को पूरा या पूर्णसमीकरण कहते हैं।

५—बीजगणित से जानते हो कि गुण्य अव्यक्तराशि और गुणक अव्यक्तराशि में एक ही अव्यक्त के घात उत्तरोत्तर एक एक घटते वा बढ़ते रहें इस क्रम से सब पदों का न्यास कर तब गुणन किया जाता है, जैसे

गुण्य $= ५\text{य}^{४} + ४\text{य}^{३} + ३\text{य}^{२} + २\text{य} + १$

गुणक $= २\text{य}^{२} + ३\text{य} + ४$

$$१०\text{य}^{६} + ८\text{य}^{५} + ६\text{य}^{४} + ४\text{य}^{३} + २\text{य}^{२}$$
$$+ १५\text{य}^{५} + १२\text{य}^{४} + ९\text{य}^{३} + ६\text{य}^{२} + ३\text{य}$$
$$+ २०\text{य}^{४} + १६\text{य}^{३} + १२\text{य}^{२} + ८\text{य} + ४$$

गुणनफल $= १०\text{य}^{६} + २३\text{य}^{५} + ३८\text{य}^{४} + २९\text{य}^{३} + २०\text{य}^{२} + ११\text{य} + ४$

देखो यहाँ यह तो स्पष्ट ही है कि गुणनफल में गुण्य, गुणक के सब से बड़े घात के योग तुल्य घात प्रथम पद में है और एक एक उतरते हुए और पदों में हैं। इसलिये गुण्य, गुणक राशि के चिन्ह समेत केवल गुणकाङ्कों को लिखने से लाघव से गुणनफल बहुत थोड़े ही स्थान में उत्पन्न हो सकता है।

जैसे केवल चिन्ह समेत गुणकाङ्कों के लेने से

गुण्य $= +५ +४ +३ +२ +१$

गुणक $= +२ +३ +४$

+१० + ८ + ६ + ४ + २
+१५ +१२ + ९ + ६ + ३
+२० +१६ +१२ + ८ +४

गुणनफल = +१० +२३ +३८ +२९ +२० +११ +४

इस में य का घात पूर्व युक्ति से लगा देने से

गुणनफल $= १०य^{६} + २३य^{५} + ३८य^{४} + २९य^{३} + २०य^{२} + ११य + ४$

इसी प्रकार $२य^{४} - य^{२} + २$, $य^{३} - ३य + १$ इस गुण्य, गुणक को प्रक्रम ३ से घात क्रम से लिखने से

गुण्य $= २य^{४} + ०य^{३} - य^{२} + ०य + २$

गुणक $= य^{३} + ०य^{२} - ३य + १$

केवल चिन्ह समेत गुणकाङ्क लेने से

गुण्य = +२ +० −१ +० +२
गुणक = +१ +० −३ +१

+२ +० −१ +० +२
+० +० −० +० +०
−६ −० +३ −० −६
+२ +० −१ +० +२

+२ +० −७ +२ +५ −१ −६ +२

∴ गुणनफल $= २य^{७} + ०य^{६} - ७य^{५} + २य^{४} + ५य^{३} - य^{२} - ६य + २$
$= २य^{७} - ७य^{५} + २य^{४} + ५य^{३} - य^{२} - ६य + २$ ।

इसी प्रकार आगे और उदाहरणों में भी जानना चाहिए ।

६—भाज्य और भाजक को भी पूर्व युक्ति से घातक्रम में रहने से फिर चिन्ह सहित उनके गुणकाङ्कों पर से लाघव से लब्धि निकलती है, जैसे

भाज्य $= ८य^{३} - २७$

भाजक $= २य - ३$

यहाँ भाजक में तो अव्यक्त के घातक्रम ही से पद हैं, केवल भाज्य में पदों को घातक्रम से लिखने से

भाज्य $= ८य^{३} + ०य^{२} + ०य - २७$ । भाजक $= २य - ३$

केवल चिन्ह समेत गुणकाङ्कों को लेने से

+२ − ३) +८ + ० + ० − २७ (+४ + ६ + ९
+८ − १२
―――――
+१२ + ० − २७
+१२ + १८
―――――
+१८ − २७
+१८ − २७
―――――

भाज्य और भाजक के सब से बड़े घातों के अन्तर तुल्य अव्यक्त के घात को लेकर ऊपर लब्धि के अङ्कों में यथाक्रम लगा देने से

लब्धि $= ४य^{२} + ६य + ९$ ।

इसी प्रकार और उदाहरणों में भी जान लेना चाहिए।

यहां यदि शेष बचता तो अन्त के शेष में अव्यक्त का शून्य घात, उपान्तिम में एक घात इत्यादि लगाकर ठीक शेष बना लिया जाता।

७—अकरणीगत अभिन्नफल—जिस अव्यक्तराशि में अव्यक्त के सब घात अभिन्न और धन हों तो उसे अव्यक्त का अकरणीगत अभिन्नफल कहते हैं, जैसे यदि

$प_{०}प^{न} + प_{१}य^{न-१} + प_{२}य^{न-२} + प_{३}य^{न-३} + \cdots\cdots + प_{न}$

इस अव्यक्तराशि में न धन और अभिन्न हो तो इसे अव्यक्त का अकरणीगत अभिन्नफल कहेंगे। यहां

$फ(य) = प_{०}य^{न} + प_{१}य^{न-१} + प_{२}य^{न-२} + प_{३}य^{न-३} + \cdots\cdots + प_{न}$

इस में यदि $य = अ$ तो

$$फ(अ) = प_{०}अ^{न} + प_{१}अ^{न-१} + प_{२}अ^{न-२} + \cdots\cdots + प_{न}$$

नीचे लिखी हुई क्रिया से $फ(य)$ का मान लाघव से जान सकते हो, जैसे मानलो कि

$$फ(अ) = प_{०}अ^{३} + प_{१}अ^{२} + प_{२}अ + प_{३}$$

यहाँ पहले $प_{०}अ$ इसका मान निकालो

इसमें $प_{१}$ जोड़ने से $प_{०}अ + प_{१}$ हुआ

इसे अ से गुण देने से $प_{०}अ^{२} + प_{१}अ$ हुआ

इसमें $प_{२}$ जोड़ देने से $प_{०}अ^{२} + प_{१}अ + प_{२}$ हुआ

इसे अ से गुण देने से $प_{०}अ^{३} + प_{१}अ^{२} + प_{२}अ$ हुआ

इसमें $प_{३}$ जोड़ देने से $प_{०}अ^{३} + प_{१}अ^{२} + प_{२}अ + प^{३}$ हुआ जो कि $फ(अ)$ के समान है।

इस प्रकार किसी अव्यक्तराशि में यदि अव्यक्त के स्थान में किसी व्यक्ताङ्क का उत्थापन देना हो तो लाघव से मान आ सकता है।

इस क्रिया को न्यास सहित नीचे लिखे हुए प्रकार से करते हैं।

$+प_{०}$	$+प_{१}$	$+प_{२}$	$+प_{३}$
	$प_{०}अ$	$प_{०}अ^{२} + प_{१}अ$	$प_{०}अ^{३} + प_{१}अ^{२} + प_{२}अ$
	$प_{०}अ + प_{१}$,	$प_{०}अ^{२} + प_{१}अ + प_{२}$,	$प_{०}अ^{३} + प_{१}अ^{२} + प_{२}अ + प_{३}$

पहली पंक्ति में चिन्ह समेत घातक्रम से जो पद हैं वे उनके गुणकाङ्क हैं। पहले गुणकाङ्क को अव्यक्त के व्यक्ताङ्क अ से गुण दूसरे गुणकाङ्क में जोड़ दिया है। इस जोड़े हुए फल को अ से गुण तीसरे गुणक में जोड़ दिया है, फिर इस जोड़े हुए फल को अ से गुण चौथे गुणकाङ्क में जोड़ दिया है, इस प्रकार अन्त में फ (अ) का मान बड़े लाघव से निकल आया है।

जैसे $२य^{४}—३य^{३}—४य+५$ इसमें यदि य=२ तो इसका क्या मान होगा यह जानना हो तो ऊपर के प्रकार से अव्यक्त-राशि के पदों को घातक्रम से रखने से

+२	−३	+०	−४	+५
	+४	+२	×४	+०
	+१	+२	+०	+५

इस लिये अव्यक्तराशि का मान ५ हुआ।

८—अव्यक्त का अकरणीगत अभिन्नफल फ (य) यह य के स्थान में अ का उत्थापन देने से शून्य हो जाय अर्थात् यदि फ (अ) =० तो फ (य) यह य−अ इससे अवश्य निःशेष होगा। कल्पना करो कि फ (य) में बीजगणित की साधारण रीति से य−अ का भाग देने से लब्धि ल और यदि संभव हो तो शेष शे है तो

फ (य) = ल (य−अ) + शे यह एक सरूप समीकरण होगा; इसमें स्पष्ट है कि ल भी अव्यक्त का कोई अकरणीगत अभिन्नफल होगा। इसमें य के स्थान में अ का उत्थापन देने से यह अनन्त के तुल्य न होगा; इसलिये ऊपर के सरूप समीकरण में य=अ मानने से

$$फ(अ) = ० = ल(अ-अ) + शे = शे$$

इसलिये शेष का मान शून्य होने से फ (य), य से निःशेष होता है।

अथवा जब

$$फ(य) = प_० य^न + प_१ य^{न-१} + प_२ य^{न-२} + \cdots\cdots + प_न$$

और

$$फ(अ) = ० = प_० अ^न + प_१ अ^{न-१} प_२ अ^{न-२} + \cdots + प^न$$

इसलिये

$फ(य) - फ(अ) = फ(य) = प_० (य^न - अ^न) + [प_१ (य^{न-१} - अ^{न-१}) + \cdots\cdots प_{न-१} (य - अ)$ यहाँ बीजगणित से स्पष्ट है कि $य^न - अ^न$, $य^{न-१} - अ^{न-१}$, इत्यादि सब $य - अ$ इससे निःशेष होते हैं इसलिये फ (य) भी $य - अ$ से निःशेष होगा।

बीजगणित की साधारण रीति से यहाँ

$$\begin{aligned} लब्धि = & प_० (य^{न-१} + अय^{न-२} + अ^२ य^{न-४} + \cdots\cdots + अ^{न-२} य + अ^{न-१}) \\ & + प_१ (य^{न-२} + अय^{न-२} + अ^२ य^{न-४} + \cdots + अ^{न-१} य + अ^{न-१}) \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + प_{न-२} (य + अ) \\ & + प_{न-१} \end{aligned}$$

समान घातों के गुणकों को इकट्ठा करने से

$$लब्धि = प_० य^{न-१} + (प_० अ + प_१) य^{न-२}$$

$$+(\text{प}_0\text{अ}^2+\text{प}_1\text{अ}+\text{प}_2)\text{य}^{\text{न}-3}+\cdots\cdots$$

$$+\text{प}_0\text{अ}^{\text{न}-1}+\text{प}_1\text{अ}^{\text{न}-2}+\text{प}_2\text{अ}^{\text{न}-3}+\text{प}_{\text{न}-1}$$

$$=\text{ब}_0\text{य}^{\text{न}-1}+\text{ब}_1\text{य}^{\text{न}-2}+\text{ब}_2\text{य}^{\text{न}-3}+\cdots\cdots+\text{ब}_{\text{न}-2}\text{य}+\text{ब}_{\text{न}-1}$$

यदि $\text{ब}_0=\text{प}_0$, $\text{ब}_1=\text{प}_0\text{अ}+\text{प}_1$, $\text{ब}_2=\text{प}_0\text{अ}^2+\text{प}_1\text{अ}+\text{प}_2$,·

अर्थात् उपर्युक्त श्रेढी के जिस संख्यक पद के गुणक को जानना हो तो उसके पिछले पद के गुणक को अ से गुण कर उसमें फ (य) के उसी संख्यक पद का गुणक जोड़ देने से अभीष्ट गुणक उत्पन्न हो जाता है। ये गुणक ७वें प्रक्रम से भी आ जाते हैं।

९—य के अकरणीगत अभिन्नफल फ (य) में य − ग का भाग देने से मान लो कि लब्धि=ल और शेष=शे तो

फ (य)=ल (य − ग) + शे। इस सरूप समीकरण में यदि य=ग तो फ (ग)=शे, इस लिये यदि फ (य) में य − ग का भाग दिया जाय तो शेष=फ (ग) और लब्धि भी ८वें प्रक्रम से सहज में आ जायगी।

जैसे यदि $२\text{य}^४-३\text{य}^३-४\,\text{य}+५$ इसमें यदि य − २ का भाग दिया तो लब्धि=$२\text{य}^३+\text{य}^२+२\text{य}+०$ और शेष होगा (७वाँ प्रक्रम देखो)। अथवा यदि $२\text{य}-३\text{य}^३-४\text{य}+५$ भाज्य राशि में य − ३ का भाग दिया तो ७ वें प्रक्रम की युक्ति से

+२	+०	−३	+०	−४	+५
	+६	+१८	+४५	+१३५	+३९३
	+६	+१५	+४५	+१३१	+३९८

इसलिये लब्धि=$२य^४ + ६य^३ + १५य^२ + ४५य + १३१$,

शे=३९८

१०—उत्पन्न फल—मान लो कि फ (य) एक अव्यक्त का अकरणीगत अभिन्नफल है।

यदि $स=फ (य)$

$स'=फ (य+च)$

तो $स'-स=फ (य+च)-फ (य)$

और $\frac{स'-स}{च}=\frac{फ(य+च)-फ (य)}{च}$

$=आ+का\ च+खा\ च^२+\cdots\cdots$

जहाँ च की अपेक्षा आ स्वतन्त्र है अर्थात् आ में च नहीं है तब आ को फ (य) का प्रथमोत्पन्न फल कहते हैं। इसे यदि फा (य) कहो तो फ (य) के स्थान में फा (य) को रखने से ऊपर की युक्ति से फा (य) का प्रथमोत्पन्न फल एक $आ_१$ उत्पन्न होगा। इसे फ (य) का द्वितीयोत्पन्न फल कहते हैं। इस प्रकार फ (य) का प्रथमोत्पन्न, द्वितीयोत्पन्न, तृतीयोत्पन्न इत्यादि यथेच्छ फल उत्पन्न कर सकते हो। इन्हें क्रम से $फ'(य)$, $फ''(य)$, $फ'''(य)$ $फ^४(य)$, $फ^५(य)$,$\cdots$ $फ^न(य)$, इत्यादि सङ्केत से प्रकाश करते हैं।

११—कल्पना करो कि

$$फ (य)=अ_० + अ_१य + अ_२य^२ + अ_३य^३ + \cdots अ_नय^न \cdots\cdots (१)$$

जहाँ य का उत्तरोत्तर एक एक बढ़ा हुआ घात प्रत्येक पद में है। इसमें यदि $य=०$ तो $अ_०=फ(०)$ और $फ(य+च)=अ_० +$

$अ_1 (य+च) + अ_2 (य+च)^2 + \cdots\cdots + अ_न (य+च)^न$ इसलिये
फ $(य+च)$–फ $(य)$

$$= अ_1 [(य+च) - य] + अ_2 [(य+च)^2 - य^2] + \cdots\cdots$$

यहाँ र संख्यक पद $= अ_र [(य+च)^र - य^र]$

$$= अ_र [र य^{र-1} च + र \frac{(र-1)}{2!} य^{र-2} च^2$$

इसलिये फ $(य+च)$–फ$(य)$

$$= अ_1 + 2अ_2 य + 3अ_3 य^2 + \cdots\cdots न अ_न य^{न-1}$$

+ ऐसे पद जिनमें च आता है

इस लिये १० वें प्रक्रम से

फ$'(य) = अ_1 + 2अ_2 य + 3अ_3 य^2 + \cdots\cdots न अ_न य^{न-1}$ जिसके देखने से फ $(य)$ से फ$'(य)$ का मान निकालने की सहज विधि यह उत्पन्न होती है कि फ $(य)$ के प्रत्येक पद को उसी पद में आए हुए य के घात से गुण दो और य के घात में से एक घटा दो तो फ$'(य)$ का मान आ जायगा। इसी प्रकार फ$'(य)$ से फ$''(य)$ का मान, फ$''(य)$ से फ$'''(य)$ इत्यादि के मान जान सकते हो।

इसलिये उपर्युक्त विधि से

$$फ''(य) = 2अ_2 + 3 \cdot 2 अ_3 य + 4 \cdot 3 अ_4 य^2 + \cdots\cdots\cdots$$

$$फ'''(य) = 3 \cdot 2 अ_3 य + 4 \cdot 3 \cdot 2 अ_4 य + \cdots\cdots\cdots$$

इनमें यदि य=० तो फ$'(0) = अ_1$, फ$''(0) = 2अ_2$

$$फ'''(0) - 3 \cdot 2 \cdot अ_3, \cdots\cdots$$

इनका उत्थापन (१) में देने से

$$फ(य)=फ(०)+फ'(०)य+फ''(०)\frac{य^२}{१\cdot२}+फ'''(०)\frac{य^३}{१\cdot२\cdot३}+\cdots$$

$$\cdots\cdots+फ^न(०)\frac{य^न}{१\cdot\cdot३\cdots न}+\cdots\cdots$$

इसमें यदि य के स्थानमें य+र का उत्थापन दो तो

$$फ(य+र)=फ(०)+फ'(०)य+फ''(०)\frac{(य+र)^२}{१\cdot२}$$

$$+फ'''\frac{(य+र)^३}{१\cdot२\cdot३\cdot}+\cdots\cdots\cdots$$

$$=फ(०)+फ'(०)य+फ''(०)\frac{य^२}{१\cdot२}+फ'''(०)\frac{य^३}{१\cdot२\cdot३}+\cdots$$

$$+\left\{फ'(०)+फ''(०)य+\cdots\cdots+फ^न(०)\frac{य^{न-१}}{१\cdot२\cdots न}\right\}र$$

$$+\left\{फ''(०)+फ'''(०)य+\cdots\cdots+फ^न(०)\frac{य^{न-२}}{(न-२)!}\right\}\frac{र^२}{१\cdot२}$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$फ(य)+फ'(य)र+फ''(य)\frac{र^२}{१\cdot२}+\cdots\cdots\cdots+फ^न(य)\frac{र^न}{न!}$$

१२—अथवा नीचे लिखी हुइ विधि के भी फ(य+र) का मान जान सकते हो।

कल्पना करो कि

$$फ(य)=प_०य^न+प_१य^{न-१}+प_२य^{न-२}+\cdots\cdots\cdots+प_न$$

इस में य, र के तुल्य वृद्धि प्राप्त करता है तो य के स्थान में य+र लिखने से

$$फ (य+र)=प_० (य+र)^न + प_१ (य+र)^{न-१} + \cdots$$
$$[+ प_{न-१} (य+र) + प_न$$

इसके प्रत्येक पद को द्वियुक्पद सिद्धान्त से फैला कर और उपचय क्रम से र के तुल्य घातों के गुणकाङ्कों को इकट्ठा कर लिखने से

$$फ (य+र)=प_० य^न + प_१ य^{न-१} + प_२ य^{न-२} + \cdots + प_{न-१} य + प_न$$
$$+ र [न प_० य^{न-१} + (न-१) प_१ य^{न-२}$$
$$+ (न-२) प_२ य^{न-३} + \cdots प_{न-१}]$$
$$+ \frac{र^२}{१.२} [न (न-१) प_० य^{न-२}$$
$$+ (न-१)(न-२) प_१ य^{न-३} \cdots\cdots + २ प_{न-२}]$$
$$+ \frac{र^३}{१.२.३} [न (न-१)(न-२) प_० य^{न-३} + (न-१)$$
$$(न-२)(न-३) प_१ य^{न-४} \cdots + ३.२ प_{न-३}]$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{र^न}{१.२.३\cdots न} [न (न-१)(न-२)(न-३)\cdots\cdots$$
$$३.२.१] प_०$$

इसमें प्रथम पंक्ति में तो स्पष्ट है कि फ(य) है और द्वितीय, तृतीय इत्यादि पंक्तिओं में क्रम से र, $\frac{र^२}{१.२}$ इत्यादि के गुणक ११वें प्रक्रम से फ′(य), फ″(य) इत्यादि सिद्ध हैं;

इसलिये $फ(य+र)=फ(य)+र\,फ'(य)+\frac{र^२}{१.२}फ''(य)+\cdots\cdots+\frac{र^न}{न!}फ^न(य)$

जैसे यदि $फ(य)=प_०य^४+प_१य^३+प_२य^२+प_३य+प_४$

तो ११वें प्रक्रम से

$$फ'(य)=४प_०य^३+३प_१य^२+२प_२य+प_३$$

$$फ''(य)=३\cdot४प_०य^२+२\cdot३प_१य+२प_२$$

$$फ'''(य)=२\cdot३\cdot४प_०य+२\cdot३प_१$$

$$फ^४(य)=२\cdot३\cdot४प_०$$

इसलिये

$$फ(य+र)=फ(य)+र\left\{४प_०य^३+३प_१य^२+२प_२य+प_३\right\}$$
$$+\frac{र^२}{१\cdot२}\left\{३\cdot४प_०य^२+२\cdot३प_१य+२प_२\right\}$$
$$+\frac{र^३}{१\cdot२\cdot३}\left\{२\cdot३\cdot४प_०य+२\cdot३\cdot प_१\right\}$$
$$+\frac{र^४}{१\cdot२\cdot३\cdot४}\left\{२\cdot३\cdot४प_०\right\}$$

और यदि $फ(य)=प\,(य+ग)^न$

तो ११व प्रक्रम से

$$फ'(य) = न\cdot प\,(य+ग)^{न-१}$$

$$फ''(य) = न\,(न-१)\,प\,(य+ग)^{न-२}$$

$$फ'''(य) = न\,(न-१)\,(न-२)\,प\,(य+ग)^{न-३}$$

इसी प्रकार आगे भी जानना चाहिए।

फिर इन पर से फ (य+र) का मान पूर्व विधि से निकाल सकते हो।

$$फ(य+र) = फ(य) + र\,फ'(य) + \frac{र^२}{१\cdot २}फ''(य) + \cdots\cdots$$

इस पर से ११वें प्रक्रम की युक्ति से

$$फ'(य+र) = फ'(य) + र\,फ''(य) + \frac{र^२}{१\cdot २}फ'''(य) + \cdots\cdots + \frac{र^{न-१}}{(न-१)!}फ^{न}(य)$$

$$फ''(य+र) = फ''(य) + र\,फ'''(य) + \frac{र^२}{१\cdot २}फ^{४}(य) + \cdots\cdots + \frac{र^{न-२}}{(न-२)!}फ^{न}(य)$$

इत्यादि सिद्ध कर सकते हो।

१३—र के अपचय घात क्रम से फ (य+र) का मान

फ (य+र) का मान जो १२वें प्रक्रम में श्रेढी में आया है उसमें यदि र को अपचय घातक्रम से लिखें तो

$$\text{फ}(\text{य}+\text{र}) = \text{प}_0\text{र}^{\text{न}} + (\text{प}_1 + \text{न}\text{प}_0\text{य})\text{र}^{\text{न}-1}$$

$$+ \left\{ \text{प}_2 + (\text{न}-1)\text{प}_1\text{य} + \frac{\text{न}(\text{न}-1)}{1\cdot 2}\text{प}_0\text{य}^2 \right\} \text{र}^{\text{न}-2}$$

$$+ \left\{ \text{प}_3 + (\text{न}-2)\text{प}_2\text{य} + \frac{(\text{न}-1)(\text{न}-2)}{1\cdot 2}\text{प}_1\text{य}^2 + \frac{\text{न}(\text{न}-1)(\text{न}-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\text{प}_0\text{य}^3 \right\} \text{र}^{\text{न}-3}$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \left\{ \text{प}_{\text{त}} + (\text{न}-\text{त}+1)\text{प}_{\text{त}-1}\text{य} + \cdots\cdots + \frac{\text{न}(\text{न}-1)\cdots\cdots(\text{न}-\text{त}+1)}{\text{त}\,!}\text{प}_0\text{य}^{\text{त}} \right\} \text{र}^{\text{न}-\text{त}}$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \text{फ}(\text{य})$$

ऐसा सिद्ध होता है।

१४—कल्पना करो कि फ (य) अव्यक्त का एक अकरणीगत अभिन्नफल है जो $\text{प}_0\text{य}^{\text{न}} + \text{प}_1\text{य}^{\text{न}-1} + \text{प}_2\text{य}^{\text{न}-2} + \cdots\cdots + \text{प}_{\text{न}}$ इसके तुल्य है। इसमें य का एक ऐसा बड़ा मान मान सकते हैं जिसके कारण श्रेढी का कोई एक पद अपने आगे के सब पदों के योग से चाहे जै गुना बड़ा हो सकता है अथवा य का ऐसा छोटा मान मान सकते हैं जिसके कारण कोई पद अपने पिछले सब पदों के योग से चाहे जै गुना बड़ा हो सकता है।

मान लो कि कोई त संख्यक पद $प_{त-१}य^{न-त+१}$ है जिसमें $प_{त-१}$ शून्य नहीं है और इसके आगे के जो $प_तय^{न-त}$, $प_{त+१}य^{न-त-१}$ इत्यादि पद हैं उनमें सब से बड़ा संख्यात्मक गुणक ब है तो स्पष्ट है कि आगे के सब पदों का योग

$$ब\,(य^{न-त}+य^{न-त-१}+\cdots\cdots+य+१)=ब\,\frac{य^{न-त+१}-१}{य-१}$$

इससे छोटा होगा। त संख्यक पद में इससे भाग देने से

$$लब्धि=\frac{प_{त-१}\,(य-१)\,य^{न-त+१}}{ब\,(य^{न-त+१}-१)}=\frac{प_{त-१}\,(य-१)}{ब-ब\,य^{-(न-त+१)}}$$

इसमें स्पष्ट है कि ज्यों ज्यों य बढता जायगा त्यों त्यों अंश बढ़ता और हर ब के तुल्य होता जायगा। इसलिये य का ऐसा बड़ा मान मान सकते हैं जिसके कारण लब्धि चाहे जितनी बड़ी हो सकती है। इस पर से पहली बात सिद्ध हुई।

दूसरी के लिये कल्पना करो कि $य=\frac{१}{र}$ तो

$$फ\,(य)=र^{-न}\,(प_०+प_१र+प_२र^२+\cdots\cdots प_नर^न)$$

अब ऊपर की युक्ति से $प_०+प_१र+प_२र^२+\cdots\cdots$ इसमें र का ऐसा बड़ा वा य का ऐसा छोटा मान मान सकते हैं जिसके कारण कोई पद अपने पिछले सब पदों के योग से चाहे जै गुना बड़ा हो सकता है। अर्थात्

$$प_०+प_१र+प_२र^२+\cdots\cdots प_{त-१}र^{त-१}<प_तर^त$$

$$वा\quad प_०र^{-न}+प_१र^{१-न}+प_२र^{२-न}+\cdots+प_{त-१}र^{त-१-न}<प_तर^{त-न}$$

$$वा\; प_०य^न+प_१य^{न-१}+प_२य^{न-२}+\cdots प_{त-१}य^{न-त+१}<प_तय^{न-त}$$

अर्थात् य का ऐसा छोटा मान मान सकते हैं जिसके कारण कोई $प_त य^{न-त}$ पद अपने पिछले सब पदों के योग से बड़ा हो सकता है, यह सिद्ध हुआ। यह सिद्धान्त बहुत ही उपयोगी है। इसे अच्छी तरह से अभ्यास करना चाहिए।

१५—असम्भव संख्या और मध्यगुणक—

$अ+\sqrt{क-१}$ इसे असम्भव संख्या कहते हैं जिसमें अ और क सम्भाव्य संख्या हैं। जहाँ कहीं इस ग्रन्थ में असम्भव संख्या आवे वहाँ सर्वत्र $अ+क\sqrt{-१}$ यही समझना चाहिए।

बीजगणित के जिन नियमों से सम्भव संख्या के जोड़, बाकी, गुणा और भाग किए जाते हैं उन्हीं नियमों से असम्भव संख्याओं के जोड़, बाकी इत्यादि किए जाते हैं। सम्भव और असम्भव संख्याओं में प्रयोग किए जाने पर ये परिकर्म केवल सम्भव और असम्भव संख्याओं को उत्पन्न करते हैं और यही बात बीजगणित के मूलानयन में भी सत्य ठहरती है।

$अ^२+क^२$ इसके धनात्मक मूल को $अ+क\sqrt{-१}$ और $अ-क\sqrt{-१}$ इन असम्भवों में से प्रत्येक का मध्यगुणक कहते हैं।

$अ+क\sqrt{-१}$ और $अ'+क'\sqrt{-१}$ का घात बीजगणित की रीति से

$अ\cdot अ'-क\cdot क'+(अ क'+अ' क)\sqrt{-१}$ है इसलिये इस असम्भव का मध्यगुणक पूर्व परिभाषा से $(अ अ'-क क')^२+(अ क'+अ' क)^२=(अ^२+क^२)(अ'^२+क'^२)$ इसका धनात्मक मूल होगा। इस पर से यह सिद्ध होता है कि दो असम्भवों

के घात तुल्य असम्भव का मध्यगुणक पूर्व दोनों असम्भवों के मध्यगुणकों के घात तुल्य होता है।

$अ + क\sqrt{-१}$ इस में यदि साथ ही $अ=०$ और $क=०$ तो असम्भव को शून्य के तुल्य कहते हैं। ऐसी दशा में असम्भव का मध्यगुणक भी शून्य के तुल्य होता है।

यदि दो असम्भवों का घात शून्य के तुल्य हो तो स्पष्ट है कि घात रूप असम्भव का मध्यगुणक भी शून्य के तुल्य होगा और पूर्व असम्भवों में से एक का मध्यगुणक भी अवश्य शून्य के तुल्य होगा। इसी प्रकार अनेक असम्भवों के घात रूप असम्भव का मध्यगुणक यदि शून्य हो अर्थात् नष्ट हो तो उन असम्भवों में से कम से कम एक का मध्यगुणक अवश्य शून्य के समान होगा।

१६—असम्भव का मूल—बीजगणित से स्पष्ट है कि यदि म धन और अभिन्न संख्या हो तो

$$(\sqrt{-१})^{४म+१} = +\sqrt{-१} \text{ और } (\sqrt{-१})^{४म+३} = -\sqrt{-१}$$

$$\text{और } (अ + क\sqrt{-१})^{२} = \sqrt{-१} \text{ जहां } अ = क = \frac{१}{\sqrt{२}}$$

$$\text{इसलिये } अ + क\sqrt{-१} = \pm\sqrt{\sqrt{-१}}$$

$$\text{और } (अ' + क'\sqrt{-१})^{२} = अ + क\sqrt{-१}$$

$$\text{जहाँ } अ'^{२} - क'^{२} = अ,\ २अ'क' = क।$$

$$\therefore (अ' + क'\sqrt{-१}) = \sqrt{अ + क\sqrt{-१}}$$

इस प्रकार से कह सकते हो कि किसी असम्भव का मूल भी एक असम्भव ही होता है।

भास्कराचार्य ने भी अपने बीजगणित में लिखा है कि "न मूलं क्षयस्यास्ति तस्याकृतित्वात्" अर्थात् ऋण संख्या का मूल सम्भव संख्या नहीं हो सकती क्योंकि ऋण संख्या किसी सम्भव संख्या का वर्ग नहीं है। इसी प्रकार यदि न अभिन्न और धन हो तो द्वियुक्पदसिद्धान्त से स्पष्ट है कि $(अ + क\sqrt{-१})^{न}$ इसमें बहुत से पद सम्भव और बहुत से ऐसे होंगे जिनके गुणक $\sqrt{-१}$ होंगे। इसलिये सम्भव और जिनके गुणक $\sqrt{-१}$ हैं उनको अलग अलग इकट्ठा करने से $(अ + क\sqrt{-१})^{न} = अ' + क'\sqrt{-१}$ ऐसा होगा। इसमें यदि क के स्थान में $-क$ का उत्थापन दें तो स्पष्ट है कि जिन जिन पदों का गुणक $\sqrt{-१}$ है उनके धन, ऋण का व्यत्यास हो जायगा इसलिये $(अ - क\sqrt{-१})^{न} = अ' - क'\sqrt{-१}$ ऐसा होगा।

१७—च के परिवर्त्तन से फ (ग + च) के मान का परिवर्त्तन। पूर्व सिद्ध है कि

$$फ(य+र) = फ(य) + र\,फ'(य) + \frac{र^{२}}{१\cdot२}\,फ''(य) + \cdots\cdots$$

इसमें यदि $य = ग$ और $र = च$ तो

$$फ(ग+च) = फ(ग) + च\,फ'(ग) + \frac{च^{२}}{१\cdot२}\,फ''(ग)$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \frac{च^{न}}{न!}\,फ^{न}(ग)$$

इसमें च का ऐसा छोटा मान मान सकते हैं जिसके वश

$$च फ'(ग);\ \frac{च^२}{१\cdot२} फ''(ग),\ \frac{च^३}{१\cdot२\cdot३} फ'''(ग), \ldots\ldots$$ इस श्रेणी

का वह प्रथम पद जो शून्य के तुल्य न हो और सब पदों के योग से यथेच्छ बड़ा हो सकता है और स्वयं बहुत ही छोटा हो सकता है (१४ वाँ प्रक्रम देखो)।

इस लिये च के परिवर्तन से फ(ग + च) को फ(ग) के चाहे जितना आसन्न बना सकते हैं। इससे स्पष्ट है कि ज्यों ज्यों ग बढ़ता है त्यों त्यों फ (ग) लगातार बदलता है। ध्यान देने की बात है कि यहाँ यह नहीं सिद्ध किया गया है कि ज्यों ज्यों ग बढ़ता है त्यों त्यों फ (ग) भी बढ़ता है। फ (ग) चाहे बढ़ वा घट सकता है वा कभी बढ़ और कभी घट सकता है। उपरोक्त बातों से केवल यही सिद्ध होता है कि फ (ग) का मान अवच्छिन्न घट या बढ़ नहीं सकता। इसी प्रकार च का ऐसा बड़ा मान मान सकते हैं जिसके वश $च\cdot फ'(ग), \frac{च^२}{१\cdot२}$

$$फ''(ग),\ \frac{च^३}{१\cdot२\cdot३} फ'''(ग), \ldots\ldots \frac{च^न}{न!} फ^न(ग)$$ इस श्रेणी का वह

अन्तिम पद जो शून्य के तुल्य न हो, और सब पिछले पदों के योग से बहुत बड़ा और स्वयं भी बहुत बड़ा हो सकता है।

इसलिये च के परिवर्तन से फ (ग + च) का मान फ (ग) से बहुत बड़ा हो सकता है। इस पर से सिद्ध होता है कि च के परिवर्तन से फ (ग + च) का मान चाहे जितना घटा बढ़ा सकते हैं।

१८—समीकरण का मूल—यदि य के स्थान में अ का उत्थापन देने से फ (य) =० हो तो फ (य) =० इस समीकरण का एक मूल अ कहा जाता है।

२ प्रक्रम से फ (य) नाना प्रकार का हो सकता है परन्तु अभी इस ग्रन्थ में जब तक इसके विरुद्ध बात न कही जाय तब तक फ (य) से सर्वदा अव्यक्त का अकरणीगत अभिन्न फल समझना चाहिए (७वाँ प्रक्रम देखो) और लाघव के लिये प्रायः फ (य) में य के सब से बड़े घात का जो गुणक हो उससे और घातों के गुणकों में भाग देकर लब्धियों को और घातों का गुणक जानना चाहिए।

जैसे यदि फ (य) $=0=$ अ$य^{न}+$ क$य^{न-१}+$ ख$य^{न-२}+\dots\dots$

तो अ का भाग देने से

$$य^{न}+\frac{क}{अ}य^{न-१}+\frac{ख}{अ}य^{न-२}+\dots\dots=य^{न}+अ_{१}\,य^{न-१}+$$
$$अ_{२}\,य^{न-२}+\dots\dots=0$$

ऐसा सीधा स्वरूप बना लेना चाहिए। यहाँ $\frac{क}{अ}=अ_{१}$, $\frac{ख}{अ}=अ_{२}$ इत्यादि।

१९—फ (य) में य के स्थान में अ और क का उत्थापन देने से यदि फ (अ) और फ (क) विरुद्ध चिन्ह के हों तो अ और क के बीच य का कम से कम एक ऐसा मान अवश्य होगा जिसके वश फ (य) =० होगा। क्योंकि यदि अ से क को बड़ा मानो तो अ से आगे ज्यों ज्यों य का मान बढ़ाते जायँगे त्यों त्यों लगातार फ (य) बदलता जायगा। इस

लिये फ (अ) और फ (क) के अन्तर्गत सब मानों को फ (य) ग्रहण करता जायगा क्योंकि फ (अ) और फ (क) विरुद्ध चिन्ह के हैं। इसलिये अ के आगे और क के पीछे य का कम से कम एक मान अवश्य ऐसा होगा जिसके वश फ (य) =० हो।

जब अ से आगे य को बढ़ाते जाओगे तब संभव है कि फ (य) कुछ दूर तक घटता वा बढ़ता जावे फिर आगे शून्य होकर बढ़ता वा घटता जावे आगे फिर भी घटता वा बढ़ता कहीं शून्य होकर फिर आगे और घटता वा बढ़ता जावे। इसलिये यह नहीं कह सकते कि अ और क के बीच कोई य का एक ही मान ऐसा होगा जिसके वश से फ (य)=० हो और यह भी नहीं कह सकते कि यदि फ (अ) और फ (क) एक ही चिन्ह अर्थात् एक ही जाति के हों तो अ और क के बीच य का मान ऐसा नहीं हो सकता जिसके वश से फ (य)=० हो।

जैसे यदि फ (य)=य^{३} − १९ य^{२} + १०८ य − १८०

इसमें यदि य=१ तो फ (१)=−९०

और यदि य=११ तो फ (११)=+४०

यहां फ (१) और फ (११) विरुद्ध चिन्ह के अर्थात् विजातीय हैं और १ और ११ के बीच ३, ६, १० य के ऐसे तीन मान में फ (य) शून्य के तुल्य होता है। इसलिये यह नहीं कह सकते कि य के एक ही मान में फ (य)=० होगा।

इसी प्रकार य = ४ और य = ११ में फ (य) = + १२ और फ (य)=+४० ये दोनों एक ही जाति के हैं परन्तु ४ और ११ के बीच य के ६ और १० ऐसे दो मान हैं जिनके वश फ (य)

शून्य के समान होता है। इसलिये यहाँ पर यही सिद्धान्त कर सकते हैं कि फ (य)=० इस समीकरण में य के स्थान में अ, क का उत्पादन देने से यदि फ (अ), फ (क) विरुद्ध चिन्ह के हों तो फ (य)=० का कम से कम एक मूल अवश्य अ और क के बीच में होगा।

२०—यदि फ (य)=० इस समीकरण में फ (य), य − अ इससे भाग देने में निःशेष हो जाय तो य का एक मान अ होगा।

मान लो कि भाग देने से लब्धि=ल तो फ (य)=ल (य − अ)

इसमें यदि य=अ तो फ (य)=फ (अ)=ल (अ − अ)=०

इसलिये य का एक मान १८वें प्रक्रम से अ हुआ।

यहां स्पष्ट है कि ल, अव्यक्त का अकरणीगत अभिन्नफल है। इसलिये इसमें अ का उत्थापन देने से फल अनन्त के तुल्य नहीं हो सकता क्योंकि अ एक ऐसी संख्या है जो अनन्त के तुल्य नहीं मानी गई है।

२१—जिस विषमघात समीकरण में जो कि फ (य)=० ऐसा है और जहाँ य के सब से बड़े घात के पद के गुणक से भाग देकर समीकरण को छोटा कर लिया है वहाँ यदि अन्तिम पद जिसमें य का कोई घात नहीं है वह धन हो तो फ (य)=० इसका एक मूल अवश्य ऋण होगा और यदि ऋण हो तो धन होगा।

जैसे फ (य)=$य^{न} + प_{१} य^{न-१} + \cdots\cdots + प_{न}$ इसमें मानो कि न विषम है। इसलिये फ (य)=$य^{न} + प_{१} य^{न-१} + \cdots\cdots\cdots + प_{न}$

इसमें १४वें प्रक्रम से य का ऐसा बड़ा मान मान सकते हैं जिससे $य^न$ यह और सब पदों के योग से बड़ा हो। इसलिये य के एक ऋण और एक धन मान में फ (य) के जो दो मान होंगे वे विरुद्ध चिन्ह के होंगे और फ (य)=० इसका कम से कम एक मूल $य_१$ सम्भाव्य संख्या के तुल्य उन य के मानों के बीच होगा (१९वाँ प्रक्रम देखो)।

यहाँ स्पष्ट है कि यदि य=० तो फ (य)=$प_न$ इसलिये यदि $प_न$ यह धन हो तो $य_१$ ऋण और ऋण हो तो $य_१$ धन होगा।

२२—फ (य) $= ० = य^न + प_१ य^{न-१} + प_२ य^{न-२} + \cdots\cdots + प_{न-१} य + प_न$

इसमें यदि न सम हो और अन्तिम पद $प_न$ यह ऋण हो तो कम से कम य के दो सम्भाव्य मान आवेंगे जो परस्पर विरुद्ध चिन्ह के होंगे। क्योंकि यदि य = ० तो फ (य)=$प_न$ अर्थात् ऋण होगा और १४वें प्रक्रम से य का एक ऐसा मान हो सकता है जिससे $य^न$ और सब पदों के योग से बड़ा हो। इसलिये फ (य) का वही चिन्ह रहेगा जो $य^न$ का है परन्तु चाहे य का वह मान धन वा ऋण हो $य^न$ सर्वदा धन ही रहेगा क्योंकि न सम माना गया है। इसलिये य के शून्य और एक ऋण मान में वा शून्य और एक धन मान में फ (य) के जो दो मान होंगे वे विरुद्ध चिन्ह के होंगे। इसलिये कम से कम य के एक ऋण और एक धन मान में फ (य) अवश्य शून्य के तुल्य होगा (१९वाँ प्रक्रम देखो)।

२३—फ (य) = ० = $प_{०}य^{न} + प_{१}य^{न-१} + \cdots\cdots प_{त}य^{न-त}$
$+ \cdots\cdots प$

इसमें यदि आदि पद से लेकर त + १ पद तक प्रत्येक पद के गुणक $प_{०}$, $प_{१}$ इत्यादि एक चिन्ह के और अवशिष्ट पदों के प्रत्येक गुणक दूसरे चिन्ह के हों तो फ (य) =० इसका सम्भाव्य धन मूल एक ही होगा।

यहाँ २१ वें और २२ वें प्रक्रम से स्पष्ट है कि कम से कम य का एक सम्भाव्य धन मान अवश्य होगा। अब इतना और दिखा देना है कि वही एक धन मान होगा दूसरा धन मान नहीं हो सकता।

मान लो कि $प_{०}; प_{१}, प_{२}, \cdots\cdots प_{त}$ सब धन हैं और

$प_{त+१} = -प'_{त+१}, प_{त+२} = -प'_{त+२}, \cdots\cdots प_{न} = -प'_{न}$ तो

$$फ (य) = प_{०}य^{न} + प_{१}य^{न-१} + \cdots\cdots + प_{त}य^{न-त} \cdots + प^{न}$$

$$= य^{न-त} \left\{ \left(प_{०}य^{त} + प_{१}य^{त-१} + \cdots\cdots + प_{त} \right) - \left(\frac{प'_{त+१}}{य} + \frac{प'_{त+२}}{य^{२}} + \cdots\cdots + \frac{प'_{न}}{य^{न-त}} \right) \right\}$$

इसमें स्पष्ट है कि ज्यों ज्यों य बढ़ेगा त्यों त्यों धनात्मक खण्ड बढ़ेगा और ऋणात्मक खण्ड घटेगा; इसलिये जिस य के एक धन मान में दोनों खण्ड तुल्य होकर फ (य) को शून्य के तुल्य बनावेंगे उससे ज्यों ज्यों अधिक य होता जायगा त्य त्यों धनात्मक खण्ड अधिक और उससे अल्प ऋणात्मक खण्ड

होता जायगा। इसलिये अब आगे य के किसी धन मान में ऐसा नहीं हो सकता कि दोनों खण्ड तुल्य होकर फिर फ (य) को शून्य के तुल्य बनावें। इसलिये फ (य) =० इसका एक ही धन मूल होगा। दूसरा धन मूल नहीं हो सकता।

यहाँ पर यह नहीं कहा जा सकता है कि ऐसी दशा में फ (य) =० का कोइ ऋण मूल नहीं है क्योंकि ऊपर की युक्ति से इतना ही सिद्ध हुआ है कि ऐसे समीकरण में फ (य) =० का धन मूल एक ही आवेगा।

२४—एकवर्णसमीकरण के मूलों की संख्या अव्यक्त के सब से बड़े घात के तुल्य होती है।

मान लो कि $\text{य} - \text{अ}_{१}$, $\text{य} - \text{अ}_{२}$, $\text{य} - \text{अ}_{३}$,......$\text{य} - \text{अ}_{\text{न}}$ ये न युग्म पद हैं, इनमें $\text{अ}_{१}$, $\text{अ}_{२}$ इत्यादि सम्भाव्य वा असम्भव संख्या य से स्वतन्त्र हैं अर्थात् इनमें य का कोई घात नहीं है तो बीजगणित की साधारण रीति से

$$(\text{य} - \text{अ}_{१})(\text{य} - \text{अ}_{२}) = \text{य}^{२} - (\text{अ}_{१} + \text{अ}_{२})\text{य} + \text{अ}_{१}\text{अ}_{२}$$

$$(\text{य} - \text{अ}_{१})(\text{य} - \text{अ}_{२})(\text{य} - \text{अ}_{२}) = \text{य}^{३} - (\text{अ}_{१} + \text{अ}_{२} + \text{अ}_{३})\text{य}^{२} + (\text{अ}_{१}\text{अ}_{२} + \text{अ}_{२}\text{अ}_{३} + \text{अ}_{१}\text{अ}_{२})\text{य} - \text{अ}_{१}\text{अ}_{२}\text{अ}_{३}$$

$$(\text{य} - \text{अ}_{१})(\text{य} - \text{अ}_{२})(\text{य} - \text{अ}_{३})(\text{य} - \text{अ}_{४}) = \text{य}^{४} - (\text{अ}_{१} + \text{अ}_{२} + \text{अ}_{३} + \text{अ}^{४})\text{य}^{३}$$
$$+ (\text{अ}_{१}\text{अ}_{२} + \text{अ}_{१}\text{अ}_{३} + \text{अ}_{१}\text{अ}_{४} + \text{अ}_{२}\text{अ}_{३} + \text{अ}_{२}\text{अ}_{४} + \text{अ}_{३}\text{अ}_{४})\text{य}^{२}$$
$$- (\text{अ}_{१}\text{अ}_{२}\text{अ}_{३} + \text{अ}_{१}\text{अ}_{२}\text{अ}_{४} + \text{अ}_{१}\text{अ}_{३}\text{अ}_{४} + \text{अ}_{२}\text{अ}_{३}\text{अ}_{४})\text{य}$$
$$+ \text{अ}_{१}\text{अ}_{२}\text{अ}_{३}\text{अ}_{४}$$

इस प्रकार से आगे भी गुणनफल को बढ़ाने से स्पष्ट होता है कि $य - अ_{१}$, $य - अ_{२}$ इत्यादि जितने खण्ड होते हैं उनके गुणनफल में प्रथम पद में उतना ही घात य का होता है और अन्य पदों में एक एक उतरता हुआ य का घात रहता है। इसलिये यदि

$फ(य) = ० = य^{न} + प_{१}य^{न-१} + \dots\dots + प_{न}$ ऐसा हो तो न तुल्य गुण्यगुणकरूप अवयव में इसका रूपान्तर कर सकते हैं अर्थात्

$$फ(य) = ० = (य - अ_{१})(य - अ_{२}) \dots\dots (य - अ_{न})$$

इसमें स्पष्ट है कि यदि $य = अ_{१}, अ_{२}, अ_{३}, \dots\dots अ_{न}$ तो

$फ(य) = ०$। इसलिये $अ_{१}, अ_{२}, \dots\dots अ_{न}$ इत्यादि $फ(य) = ०$ इस समीकरण के मूल हुए।

इससे सिद्ध होता है कि $फ(य) = ०$ इसमें य के सब से बड़े घात की जो संख्या हो उतने ही मूल आवेंगे जिसके वश से फ (य) शून्य के तुल्य होगा।

२५—प्रसिद्धार्थ—इस प्रक्रम में समीकरणों के विषय में कुछ प्रसिद्धार्थ लिखते हैं जो पिछले प्रक्रमों की युक्ति से बहुत ही स्पष्ट हैं।

(१) यदि फ (य) में प्रत्येक पद के गुणक धन हों तो $फ(य) = ०$ इसका धन मूल कोई नहीं होगा।

(२) यदि फ (य) में य के समघात के प्रत्येक पद के गुणक एक चिन्ह के और विषम घात के प्रत्येक पद के गुणक दूसरे चिन्ह के हों तो $फ(य) = ०$ इसका कोई मूल ऋण न होगा।

(३) फ (य) में यदि य के सम घात हों और प्रत्येक पद के गुणक अन्तिम पद जो य से स्वतन्त्र है लेकर एक ही चिन्ह के हों तो फ (य)=० इसका कोई सम्भाव्य मूल न होगा।

(४) फ (य) में यदि सब पदों में य का विषम घात हो और अन्तिम पद में य का एक घात रहे और सब पदों के गुणक एक ही चिन्ह के हों तो फ (य)=० इसका एक मूल शून्य होगा और बाकी सब मूल असम्भव संख्या में आवेंगे।

(५) फ (य)=० इसमें जहाँ सबसे बड़े य के घात का गुणक रूप है वहाँ द्वितीय पद का गुणक य के सब मानों के योग तुल्य विरुद्ध चिन्ह का होता है, तृतीय पद का गुणक य के दो दो मानों के घात के योग तुल्य होता है, चतुर्थ पद का गुणक य के तीन तीन मानों के घात के योग तुल्य विरुद्ध चिन्ह का होता है..., इसी प्रकार आगे भी गुणक और य के मानों में परस्पर सम्बन्ध जानना चाहिए।

अभ्यास के लिये प्रश्न।

१—अव्यक्त राशि किसे कहते हैं।

२—फ (य) से क्या समझते हो।

३—गुण्य = $य^४ - य^२ + २$, गुणक = $२य^२ - ५य + ३$। गुणनफल केवल चिन्हों और $य^४$ इत्यादि के गुणकों को लेकर बताओ।

४—ऊपर के प्रश्न की चाल से यदि भाज्य = $२य^४ - ३य^२ + ४$, भाजक = $य^२ + २$ तो लब्धि का मान और शेष का मान बताओ।

५—अव्यक्त का अकरणीगत अभिन्नफल किसे कहते हैं।

६—यदि फ $(य) = २य^४ + ३य^२ - ४य + २$ तो फ (४) का क्या मान होगा।

७—सिद्ध करो कि यदि फ $(अ) = ०$ तो फ $(य)$ अवश्य $य - अ$ से भाग लेने में निःशेष होगा।

८—$२य^४ + ३य^२ - ४य + २$ इसमें यदि $य - ४$ इससे भाग दिया जाय तो क्या लब्धि और शेष होंगे।

९—यदि फ $(य) = ४य^५ - ५य^४ + २$ तो फ$'$ $(य)$ का क्या मान होगा।

१०—यदि फ $(य) = प_०य^न + प_१य^{न-१} + \cdots\cdots + प^न$ तो सिद्ध करो कि

$$\text{फ}(य+र) = \text{फ}(य) + र\,\text{फ}'(य) + \frac{र^२}{१\cdot२}\text{फ}''(य) + \frac{र^३}{१\cdot२\cdot३}\text{फ}'''(य) + \cdots\cdots\cdots$$

११—सिद्ध करो कि $२य^५ - य^४ + ४य^३ + ८य^२ - ५य + ५$ इसमें य का एक ऐसा मान मान सकते हैं जिससे $२य^५$ यह और पदों के योग से बड़ा हो सकता है या य का ऐसा छोटा मान मान सकते हैं जिसके वश से

$$८य^२ > २य^५ - य^४ + ४य^३$$

१२—असम्भव संख्या किसे कहते हैं।

१३—$अ + क\sqrt{-१}$, $अ' + क'\sqrt{-१}$ इनके घात तुल्य असम्भव में मध्यगुणक क्या होगा।

१४—$य^{७} = -\sqrt{-१},\ य^{६} = +\sqrt{-१}$ इनमें य का एक मान बताओ।

१५—दिखलाओ कि $२य^{३} + ६य^{२} + २य - १२ = ०$ इसका एक ही मूल १ और २ के बीच है।

सिद्ध करो

१६—$३य^{३} + ९य^{२} + ३य + १८ = ०$ इसका कोई धन मूल न होगा।

१७—$२य^{६} - ३य^{५} + २य^{४} - ५य^{३} + ४य^{२} - ३य + ५ = ०$ इसका कोई ऋण मूल न होगा।

१८—$य^{६} + २य^{४} + ३य^{२} + ५ = ०$ इसका कोई सम्भाव्य मूल न आवेगा।

१९—$य^{२} + कय + ग = ०$ इसके दोनों मूल $अ_{१}$ और $अ_{२}$ हों तो $अ_{१} + अ_{२} = -क;\ अ_{१}\ अ_{२} = ग$

२—समीकरणों के गुण

२६—समीकरण में जोड़े जोड़े असम्भव मूल होते हैं—पहले २४ वें प्रक्रम में दिखा आए हैं कि $फ(य) = ०$ इस समीकरण में य के सब से बड़े घात की जो संख्या होगी उतने ही समीकरण के मूल आवेंगे, वे चाहें सम्भाव्य वा असम्भाव्य संख्या हों।

कल्पना करो कि अव्यक्त के अकरणीगत अभिन्नफल फ (य) में प्रत्येक पद का गुणक सम्भाव्य संख्या है और फ (य) =० इसका एक मूल असम्भव $अ+क\sqrt{-१}$ यह है तो य के स्थान में $अ+क\sqrt{-१}$ इसका उत्थापन देने से १६वें प्रक्रम से

$$फ(य) = अ' + क'\sqrt{-१} = ० \text{ ऐसा होगा जहाँ}$$

$अ' = ०$ और $क' = ०$ होगा और यदि य के स्थान में $अ-क\sqrt{-१}$ का उत्थापन दो तो १६वें ही प्रक्रम से

$$फ(य) = अ' - क'\sqrt{-१} = ० \text{ होगा।}$$

इस पर से सिद्ध होता है कि ऐसे फ (य) =० में यदि एक असम्भव मूल $अ+क\sqrt{+१}$ होगा तो उसी के साथ ही दूसरा मूल $अ-क\sqrt{-१}$ यह भी होगा अर्थात् समीकरण में जोडे जोडे इस प्रकार के असम्भव मूल होंगे।

मानो कि $अ_१=अ+क\sqrt{-१}$ और $अ_२=अ-क\sqrt{१-}$ तो फ (य), $य-अ_१$ और $य-अ_२$ इनसे निःशेष होगा अर्थात् $(य-अ_१)(य-अ_२)$ इससे फ (य) निःशेष होगा परन्तु

$$(य-अ_१)(य-अ_२)=य^२-(अ_१+अ_२)य+अ_१ अ_२$$
$$=य^२-२ अ य+अ^२+क^२$$

इसलिये फ (य) में $य^२-२ अ य+अ^२+क^२$ ऐसे भी गुणक रूप खण्ड होंगे जिनमें अ, क, $क^२+अ^२$ इत्यादि सब सम्भाव्य संख्या हैं। समीकरण से सर्वदा फ (य)=० इस रूप

का समीकरण समझना चाहिए जो कि सब समीकरणों में एक पक्ष को दूसरे पक्ष में घटा देने से बन सकता है।

२७—समीकरण में जोड़े जोड़े करणीगत मूल होते हैं—इसी प्रकार यदि अव्यक्त के अकरणीगत अभिन्न-फल फ (य) में सब गुणक अकरणीगत हों और फ (य)=० इस समीकरण का एक मूल $अ+\sqrt{क}$ ऐसा हो जहाँ $\sqrt{क}$ एक करणी है तो एक दूसरा मूल $अ-\sqrt{क}$ ऐसा भी होगा और फ (य) में गुणकरूप खण्ड

$(य-अ-\sqrt{क})\ (य-अ+\sqrt{क}) = (य-अ)^२ - क$ ऐसे भी होंगे।

२८—खण्डों की संख्या—$य-अ_१$, $य-अ_२$ इत्यादि को य के एक घात के खण्ड, $य^२-(अ_१+अ_२)\,य+अ_१ अ_२$ इसे द्विघात के खण्ड, इसी प्रकार जिसमें $य^३$, $य^४$ इत्यादि हों उन्हें क्रम से तीन, चार घात आदि के खण्ड कहें तो स्पष्ट है कि फ (य) में यदि य का सब से बड़ा घात न हो तो फ (य) में गुण्यगुणकरूप एक घात के खण्ड न होंगे। दो घात के खण्ड $\frac{न\ (न-१)}{१\cdot२}$, त घात के खण्ड $\frac{न\ (न-१)\cdots(न-त+१)}{त\,!}$ होंगे (२४वाँ प्रक्रम देखो)।

२९—तुल्य मूल—यदि फ $(य)=०=प_०य^न+प_१य^{न-१}+\cdots\cdots+प_न$ इसके जो $अ_१$, $अ_२$, $अ_३$,………, $अ_न$ मूल आवेंगे उनमें बहुत से आपस में तुल्य हों तो फ (य) का लाघव से नया रूप बना सकते हो, जैसे मान लो कि, फ (य)=०

इसके मूल में $अ_1$, त बार, $अ_2$, थ बार, $अ_3$, द बार आए हैं तो $फ(य) = प_0 (य - अ_1)^{त} (य - अ_2)^{थ} (य - अ_3)^{द} \ldots\ldots$ अब इस रूप के अतिरिक्त फ (य) का दूसरा ऐसा रूप नहीं बन सकता जिसमें $(य - अ_1)$ यह त बार से अधिक वा न्यून हो, $(य - अ_2)$ यह थ बार से अधिक वा न्यून हो, इत्यादि। यदि सम्भव हो तो मानो कि

$$फ(य) = प_0 (य - अ_1)^{त_1} (य - अ_2)^{थ_1} (य - अ_3)^{द_1} \ldots$$

$$इसलिए\ प_0 (य - अ_1)^{त} (य - अ_2)^{थ} (य - अ_3)^{द} \ldots\ldots$$

$$= प_0 (य - अ_1)^{त_1} (य - अ_2)^{थ_1} (य - अ_3)^{द_1} \ldots\ldots$$

मान लो कि $त > त_1$ तो $(य - अ_1)^{त_1}$ का दोनों पक्षों में भाग देने से

$$प_0 (य - अ_1)^{त - त_1} (य - अ_2)^{थ} (य - अ_3)^{द} \ldots\ldots\ldots$$

$= प_0 (य - अ_2)^{थ_1} (यअ - _3)^{द_1} \ldots\ldots$ इसमें यदि $य = अ_1$ तो बायाँ पक्ष शून्य होता है परन्तु दहिना पक्ष शून्य नहीं होता इसलिए ऊपर का समीकरण असम्भव हुआ। इसलिये $त = त_1$। इसी प्रकार सिद्ध कर सकते हो कि $थ = थ_1$, $द = द_1$, इत्यादि।

३०—समीकरण में यदि य के सब से बड़े घात की संख्या से अधिक मूल हों तो सब गुणक शून्य के तुल्य होंगे।

$फ(य) = 0 = प_0 य^न + प_1 य^{न-1} + प_2 य^{न-2} + \cdots + प_न$
इसमें २४वें प्रक्रम से जब स्पष्ट है कि य के एक घात के गुणय-गुणकरूप खण्ड न होंगे; इसलिये फ (य)=० के न मूल आवेंगे तब स्पष्ट है कि उन न मूलों से भिन्न संख्या का उत्थापन यदि य के स्थान में दें तो फ (य)=० नहीं हो सकता परन्तु यदि पूछने वाला कहे कि न संख्याओं से भिन्न संख्या में भी फ (य)=० ऐसा होता है तो स्पष्ट है कि

$$फ(य) = 0 = प_0 य^न + प_1 य^{न-1} + \cdots\cdots + प_न$$

यह तभी सम्भव हो सकता है जब $प_0, प_1, प_2, \ldots\ldots, प_न$ ये सब गुणक शून्य के समान हों। ऐसी दशा में य के स्थान में चाहे जिस संख्या का उत्थापन देओ सर्वदा फ (य)=० होगा।

३१—समीकरण का एक मूल जान कर उससे एक घात छोटा नया समीकरण बनाया जा सकता है—$फ(य) = 0 = प_0 य^न + प_1 य^{न-1} + \cdots\cdots + प_न$ इसका यदि एक मूल $अ_1$ हो तो ८वें प्रक्रम के फ (य) यह $य - अ_1$ इससे भाग देने से निःशेष होगा। लब्धि भी अव्यक्त का कोई अकरणीगत अभिन्न फल होगी जिसमें य का सब से बड़ा घात $न-1$ होगा। इस लब्धि को यदि फा (य) कहो तो अब एक नया समीकरण फा (य)=० ऐसा बना सकते हो क्योंकि

$$फ(य) = 0 = फा(य)\left\{य - अ_1\right\}$$ इसलिये दोनों पक्षों में $य - अ_1$ का भाग देने से फा (य)=० हुआ। पहिले समीकरण की अपेक्षा यह एक घात कम का समीकरण हुआ। इसका यदि एक मूल $अ_2$ व्यक्त हो तो फा (य)=० इसमें $य - अ_2$ इसका

भाग देकर फिर एक नया समीकरण फि (य)=० ऐसा बना सकते हो जिसमें य का और एक कम घात रहेगा। इस प्रकार समीकरण के एक मूल को जानने से उससे एक घात छोटा नया समीकरण बनता चला जायगा।

३२—गुणकों और मूलों में परस्पर का सम्बन्ध—२५वें प्रक्रम के ५वें प्रसिद्धार्थ में जो बात कह आए हैं उसे अनुमान के अतिरिक्त नीचे लिखे हुए प्रकार से भी सिद्ध कर सकते हो।

मान लो कि २४वें प्रक्रम से यदि न—१ गुण्यगुणकरूप खण्ड फ (य) में हों तो वे बातें जो ५वें प्रसिद्धार्थ में हैं ठीक हैं तो

$$(य - य_१)(य - अ_१)\cdots(य - अ_{न-१}) = फ(य)$$

$$= य^{न-१} + प_१ य^{न-२} + \cdots\cdots\cdots + प_{न-१}$$

जहां $प_१ = -(अ_१ + अ_२ + \cdots + अ_{न-१}) = -अ_१, -अ_२, \cdots\cdots$
$-अ_{न-१}$ इनका योग।

$प_२ = -अ_१, -अ_२ \cdots\cdots$ इत्यादि में दो दो के घात का योग

$प_३ = -अ_१, -अ_२, -अ_३$ इत्यादि में तीन तीन के घात का योग।

....

$प_{न-१} = -अ_१, -अ_२, \cdots\cdots, अ_{न-१}$ इन सब का घात।

ऊपर के समीकरण के दोनों पक्षों को एक नये खण्ड $य - अ_{न}$ से गुणने से

$$(य-अ_{१})\,(य-अ_{२})\ldots\ldots(य-अ_{न}) = य^{न} + (प_{१} - अ\;)\,य^{न-१} + (प_{२} - प_{१}\,अ_{न})\,य^{न-२} + (प_{३} - प_{२}\,अ_{न})\,य^{न-३} + \ldots\ldots + प_{न-१}\,अ_{न}$$

परन्तु $प_{१} - अ_{न} = -अ_{१} - अ_{२} - अ_{३} - \ldots\ldots - अ_{न}$

$= -अ_{१}, -अ_{२}, \ldots\ldots, -अ_{१}$ इनका योग ।

$प_{२} - प_{१}अ_{न} = प_{२} + अ_{न}\,(अ_{१} + अ_{२} + \ldots\ldots + अ_{न-१})$

$= -अ_{१}, -अ_{२}, \ldots\ldots, -अ_{न}$ इन में दो दो के घात का योग ।

$प_{३} - प_{२}अ_{न} = प_{३} - अ_{न}\,(अ_{१}अ_{२} + अ_{२}अ_{३} + \ldots\ldots)$

$= -अ_{१}, -अ_{२}, \ldots, \ldots -अ_{न}$ इनमें तीन तीन के घात का योग ।

$-प_{न-१}\,अ_{न} = -अ_{१}, -अ_{२}, -अ_{३}, \ldots, -अ_{न}$ इनका घात ।

इसलिये वे बातें यदि न − १ गुण्यगुणकरूप खण्डों में सत्य हैं तो न खण्डों में भी सत्य होंगी परन्तु २४वें प्रक्रम से ४ गुण्यगुणक खण्डों में सत्य हैं, इसलिये ५ खण्डों में भी सत्य होंगी ।

न − १ के स्थान में ५ का उत्थापन देने से ६ में भी सत्य होंगी। इस प्रकार आगे बढ़ाने से स्पष्ट है कि चाहे जितने गुण्यगुणकरूप खण्ड हों सब में २५वें प्रक्रम के ५वें प्रसिद्धार्थ की बातें सत्य हैं ।

इसलिये उसी प्रसिद्धार्थ से कह सकते हो कि फ (य)=० इसमें $य^{न-त}$ का गुणक यदि $प_त$ है तो $(-१)^त प_त$ समीकरण के मूलों में से त, त के घातों के योग के तुल्य होता है। ऐसा साधारण एक समीकरण उत्पन्न होगा जिसमें त के स्थान में १, २, ३,... इत्यादि का उत्थापन देने से सब पदों के गुणकों और फ (य) =० इसके मूलों में जो परस्पर सम्बन्ध है उसका ज्ञान हो जायगा।

जैसे $य^३ + प_१ य^२ + प_२ य + प_३ = ०$ इस समीकरण के मूल यदि $अ_१, अ_२, अ_३$ मान लो तो

$$-अ_१ - अ_२ - अ_३ = प_१ \dots\dots (१)$$

$$अ_१ अ_२ + अ_१ अ_३ + अ_२ अ_३ = प_२ \dots\dots (२)$$

$$-अ_१ अ_२ अ_३ = प_३ \dots\dots (३)$$

फिर

$$-अ^३_१ - अ^२_१ अ_२ - अ^२_१ अ_३ = प_१ अ^२_१ \dots\dots (४)$$

$$अ_१ अ_२ अ_३ + अ^२_१ अ_२ + अ^२_१ अ_३ = प_२ अ_१ \dots\dots (५)$$

(३), (४) और (५) को जोड़ देने से

$$-अ^३_१ = प_१ अ^२_१ + प_२ अ_१ + प_३$$

इसलिये $अ^३_१ + प_१ अ^२_१ + प_२ अ_१ + प_३ = ०$

अर्थात् अ के जानने के लिये वैसा ही समीकरण उत्पन्न हुआ जैसा पहिले का समीकरण था। भेद इतना ही है कि वहाँ य है यहाँ य के स्थान में $अ_१$ है। यहाँ फ (य) =० इसके तीनों मूलों में से किसी के लिये $अ_१$ मान सकते हो क्योंकि दूसरा

समीकरण $अ_१$ के जानने के लिये जो उत्पन्न हुआ है उससे $अ_१$ के तीन मान आवेंगे।

३३—मूलों के वर्गों का योग—२५वें प्रक्रम के ५वें प्रसिद्धार्थ में गुणकों और मूलों में जो सम्बन्ध दिखा आए हैं और उससे ऊपर के प्रक्रम में $(-१)^{त}प_{त}$ इसका जो मान दिखला आए हैं उनसे यद्यपि वर्गसमीकरण छोड और घन-समीकरणादि के मूल निकालने में काम नहीं चलता तथापि उनसे समीकरणों के विषय में बहुत उपयुक्त बातों का पता लग जाता है।

जैसे $अ_१, अ_२, \ldots, अ_न$ यदि $य^{न} + प_१ य^{न-१} + प_२ य^{न-२} + \cdots + प_न = ०$ इस समीकरण के मूल हों तो

$$-प_१ = अ_१ + अ_२ + \cdots + अ_न$$

$$प_२ = अ_१ अ_२ अ_१ अ_३ + \cdots + अ_२ अ_३ + \cdots\cdots$$

इसलिये $प^२_१ - २ प_२ = अ^२_१ + अ^२_२ + अ^२_३ + \cdots + अ^२_न$

इस पर से सिद्ध हुआ कि सब मूलों के वर्गयोग के तुल्य $प^२_१ - २प_२$ होता है इसलिये यदि $प^२_१ - २प_२$ यह ऋण हो तो सब मूल सम्भाव्य संख्या नहीं होंगे।

३४—गुणकों और मूलों में और भी सम्बन्ध—इसी प्रकार से और भी सम्बन्ध जान सकते हो। जैसे

$(-१)^{न-१}प_{न-१}$ = मूलों के न − १, न − १ घातों का योग

$(-१)^{न}प_{न}$ = सब मूलों का घात

भाग देने से

$$-\frac{प_{न-१}}{प_न}=\frac{१}{अ_१}+\frac{१}{अ_२}+\frac{१}{अ_३}+\cdots\cdots+\frac{१}{अ_न}\cdots\cdots(१)$$

और $(-१)^{न-२}प_{न-२}$ = मूलों के न − २, न − २ घातों का योग

$(-१)^{न}प_न$ = सब मूलों का घात

इसलिये भाग देने से

$$\frac{प_{न-२}}{प_न}=\frac{१}{अ_१अ_२}+\frac{१}{अ_१अ_३}+\cdots\cdots+\frac{१}{अ_२अ_३}+\cdots\cdots(२)$$

(१) के वर्ग में (२) का दूना घटा देने से

$$\frac{प^२_{न-१}}{प^२_न}-२\frac{प_{न-२}}{प_न}=\frac{प^२_{न-१}-२\,प_{न-२}\,प_न}{प^२_न}=\frac{१}{अ^२_१}+\frac{१}{अ^२_२}+\frac{१}{अ^२_२}+\cdots\cdots\frac{१}{अ^२_न}$$

इसे $प^२_१-२प_२=अ^२_१+अ^२_२+\cdots+अ^२_न$ इससे गुण देने से

$$\frac{(प^२_१-२\,प_२)\,(प^२_{न-१}-२\,प_{न-२}\,प_न)}{प^२_न}=न+\frac{अ^२_१}{अ^२_२}+\frac{अ^२_१}{अ^२_३}+\cdots\cdots+\frac{अ^२_२}{अ^२_१}+\cdots\cdots$$

इसलिये

$$\frac{(प_१^२-२\,प_२)\,(प^२_{न-१}-२\,प_{न-२}\,प_न)}{प^२_न}-न=\frac{अ^२_१}{अ^२_२}+\frac{अ^२_१}{अ^२_३}+\cdots\cdots+\frac{अ^२_२}{अ^२_१}+\cdots\cdots$$

इस प्रकार अनेक उपयुक्त बातें जान सकते हो।

अभ्यास के लिये प्रश्न।

१—एक समीकरण ऐसा बनाओ जिसके मूलों के मान १, −१, २, −२ हों।

२—ऐसा एक समीकरण बनाओ जिसके मूलों के मान $१ \pm \sqrt{-२}$ और $३ \pm २\sqrt{-१}$ हों।

३—एक सप्त घात समीकरण ऐसा बनाओ जिसके मूलों में से एक का मान $१ + \sqrt{३} + \sqrt{-१}$ हो।

४—नीचे लिखे हुए समीकरणों के और मूल बताओ जब कि एक मूल दिया हुआ हैः—

(१) $य^३ - य^२ + ३य + ५ = ० ;\ य = १ + २\sqrt{-१}$

(२) $२य^४ + ८य^३ + १२य^२ + ८य + १० = ० ;\ य = \sqrt{-१}$

(३) $३य^४ + ३य^३ - ७५य^२ + १२३य + १९८ = ० ;\ य = ३ - \sqrt{-२}$

(४) $य^४ + २य^३ - ४य^२ + ६ = ३ + ४य ;\ य = \sqrt{२}$

(५) $य^४ + २ = २य^३ + ५य^२ + ६य ;\ य = २ - \sqrt{३}$

(६) $य^६ + २य^३ + २१य^२ = य^५ + ८य^४ + ९य + ५४ ;$

$$य = \sqrt{२} - \sqrt{-१}$$

५—$य^५ + ८य^२ = य^४ + ९य + १५$ इसमें एक मूल $\sqrt{३}$ और दूसरा $१ + २\sqrt{-१}$ हों तो और मूल क्या होंगे।

६—$य^३ + य^२ - १७य + ग = ०$ इसमें एक मूल ३ है तो और मूलों को और ग के मान को बताओ।

७—$य^५ - ३य^४ + २य^३ + ४य^२ - य + २ = ०$ इसमें सब मूलों के वर्गयोग और पृथक् पृथक् रूप में भाग दिये हुए मूलों के वर्गयोग बताओ।

८—$य^न + प_१ य^{न-१} + प_२ य^{न-२} + \cdots\cdots + प_न = ०$ इस समीकरण के सब मूलों के घनयोग का मान बताओ।

उत्तर—$प^३_१ + ३प_१प_२ - ३प_३$

९—$य^३ + य^२ - १७य + १५ = ०$ इसमें यदि जानते हैं कि मूल $अ_१, अ_२, अ_३$ हों और $अ_२ - अ_१ = अ_३ - अ_२ + १०$ हो तो $अ_१, अ_२, अ_३$ के मान क्या होंगे।

१०—बीजगणित से यह जानते हैं कि यदि अ, क, ग, इत्यादि न संख्या धनात्मक हों तो $\frac{अ + क + ग + \cdots}{न} > (अ\cdot क\cdot ग \cdots)^{\frac{१}{न}}$

इस पर से सिद्ध करो कि यदि $प^२_१ - २प_२$ यह $नप_न^{\frac{२}{न}}$ इससे अल्प हो तो समीकरण में कोई सम्भाव्य मूल न आवेगा।

११—$य^न + प_१ य^{न-१} + \cdots\cdots + प_न = ०$ इस समीकरण के दो दो मूलों के घात का वर्गयोग बताओ।

उ-$प^२_२ - २प_१प_२ + २प_४$

१२—यदि $अ_१, अ_२, अ_३$ इत्यादि मूल हों तो सिद्ध करो कि

$$(१ - प_२ + प_४ - \cdots)^२ + (प_१ - प_३ + प_५ - \cdots)^२$$
$$= (१ + अ^२_१)(१ + अ^२_२)(१ + अ^२_३)\cdots\cdots\cdots$$

३—समीकरणोँ की रचना

३५—इस अध्याय में दिए हुए समीकरण पर से एक ऐसे समीकरण के बनाने की रीति लिखी जायगी जिसके मूल से दिए हुए समीकरण के मूल में एक निर्दिष्ट सम्बन्ध रहे।

जैसे $फ(य)=०$ यह एक दिया हुआ समीकरण है इस पर से एक ऐसा समीकरण बनाना है जिसके मूल दिए हुए समीकरण के मूल के तुल्य बिरुद्ध चिन्ह के होँ तो यहाँ स्पष्ट है कि $र=-य$ इस समीकरण में जो य के मान होंगे उनके तुल्य विरुद्ध चिन्ह के र के मान होंगे इसलिये $य=-र$ अब दिए हुए समीकरण में य के स्थान में $-र$ का उत्थापन देने से नया समीकरण $फ(य)=फ(-र)=०$ ऐसा होगा।

यदि $फ(य)=प_०य^न+प_१य^{न-१}+प_२य^{न-२}+\cdots+प_{न-१}य$ $+प^न$ तो बदला हुआ नया समीकरण

$$फ(-र)=प_न(-र)^न+प_१(-र)^{न-१}+प_२(-र)^{न-२}$$
$$+\cdots\cdots+प^{न-१}(-र)+प_न=०$$
$$=प_नर^न-प_१र^{न-१}+प_२र^{न-२}\pm\cdots+प_{न-१}र\pm प_न$$

अर्थात् दूसरे पद से एक एक पद छोड आदि समीकरण में गुणकों के चिन्ह बदल देने से यह नया समीकरण होता है। यदि दिए हुए समीकरण में य का एकापचित घातक्रम न हो तो ३ प्रक्रम से घातक्रम को बना कर तब ऊपर की लिखी हुई युक्ति से चिन्होँ को बदल कर नया समीकरण बनाना चाहिए।

जैसे यदि फ (य) $= य^७ + ४य^६ - ५य^४ - ६य^२ + ८ = ०$

तो य के स्थान में $-र$ का उत्थापन देने से नया समीकरण

$-र^७ + ४र^६ - ५र^४ - ६र^२ + ८ = ० = र^७ - ४र^६ + ५ र^४ + ६र^२ - ८$ बना, अथवा दिए हुए समीकरण का ३प्र. से घातक्रम में रूप

$य^७ + ४य^६ + ०य^५ - ५य^४ + ०य^३ - ६य^२ + ०य + ८$ यह हुआ।

इसमें य के स्थान में र को रख देने से और दूसरे पद से एक एक पद छोड सब गुणकों के चिन्ह बदल देने से नया समीकरण

$र^७ - ४र^६ + ५र^४ + ६र^२ - ८ = ०$ बना। यही पहले भी आया था।

३६—दिए हुए समीकरण से एक ऐसा समीकरण बनाना है जिसके मूल दिए हुए समीकरण के मूल से ज गुणित हों।

मान लो कि र = जय, तो इस समीकरण में स्पष्ट है कि जो जो य के मान होंगे उनसे ज गुणित य के मान होंगे। इसलिये $य = \frac{र}{ज}$ इसका उत्थापन दिए हुए फ (य) = ० इस समीकरण में देने से नये बने हुए समीकरण का रूप फ $\left(\frac{र}{ज}\right) = ०$ ऐसा होगा।

जैसे फ (य) $= प_० य^न + प_१ य^{न-१} + \cdots + प_न = ०$ इस दिए हुए समीकरण पर से नया समीकरण

$$फ\left(\frac{र}{ज}\right)=प_०\left(\frac{र}{ज}\right)^{न}+प_१\left(\frac{र}{ज}\right)^{न-१}+प_२\left(\frac{र}{ज}\right)^{न-२}+\cdots\cdots+प_न$$

$$=\frac{प_० र^{न}}{ज^{न}}+\frac{प_१ र^{न-१}}{ज^{न-१}}+\frac{प_२ र^{न-२}}{ज^{न-२}}+\cdots\cdots+प_न=०$$

ज के न घात से गुण देने से

$$प_० र^{न}+प_१ जर^{न-१}+प_२ ज^{२}र^{न-२}+\cdots\cdots+प_त ज^{त}र^{न-त}+\cdots\cdots+प_न ज^{न}=०$$

ऐसा नया समीकरण हुआ। इसमें यदि $प_०$ से भाग देकर समीकरण को छोटा करने से $\frac{प_१}{प_०}\cdots$ इत्यादि भिन्न हों तो प्रायः उनके हर के लघुतमापवर्त्य तुल्य ज को मानने से नये समीकरण में सब अभिन्न पद हो सकते हैं। जैसे यदि $य^{३}-\frac{४}{३}य^{२}+\frac{६}{५}य-\frac{३}{१०}=०$ इस पर से नया समीकरण बनाओ जहाँ $य=\frac{र}{ज}$ तो समीकरण का रूप ऊपर की युक्ति से

$$र^{३}-\frac{४}{३}र^{२}ज+\frac{६}{५}रज^{२}-\frac{३}{१०}ज^{३}=०$$

इसमें स्पष्ट है कि यदि ज $=३०=३, ५, १०$ का लघुतमापवर्त्य, तो समीकरण

$$र^{३}-४०र^{२}+१०८०र-८१००=०$$ ऐसा हुआ।

यदि दिया हुआ समीकरण

$$य^{३}-\frac{४}{३}य^{२}+\frac{६}{९}य-\frac{३}{२७}=०$$ ऐसा होता तो नये

$$र^{३}-\frac{४}{३}जर^{२}+\frac{६}{९}ज^{२}र-\frac{३}{२७}ज^{३}=०$$ इस समीकरण में ज के स्थान में तीन ही का उत्थापन देने से

$$र^{३}-४र^{२}+६र-३=०$$

यह अभिन्न नया समीकरण बन जाता।

३७—दिए हुए समीकरण पर से एक ऐसा नया समीकरण बनाना है जिसके मूल दिए हुए समीकरण के मूल से ज स्थिराङ्क तुल्य न्यून हों।

मान लो कि $र = य - ज$ तो इसमें स्पष्ट है कि जो जो य के मान होंगे उनसे ज तुल्य न्यून र के मान होंगे। इसलिये दिए हुए $फ(य) = ०$ इस समीकरण में य के स्थान में $र + ज$ का उत्थापन देने से नया समीकरण $फ(ज + र) = ०$ ऐसा हुआ। दिया हुआ समीकरण

$फ(य) = ० = प_० य^न + प_१ य^{न-१} + \cdots\cdots + प_न$ यदि ऐसा हो तो ११वें प्रक्रम से य के स्थान में ज को रख देने से

$$फ(ज + र) = फ(ज) + फ'(ज) र + फ''(ज) \frac{र^२}{१\cdot२} + \frac{फ'''(ज) र^३}{३!} + \cdots\cdots + \frac{फ^न(ज) र^न}{न!} = ०$$

और १२वें प्रक्रम से र के एकाप चित घातक्रम से

$$फ(ज + र) = प_० र^न + (प_१ + नप_० ज) र^{०-१} +$$

$$\left\{ प_२ + (न-१) प_१ ज + \frac{न(न-१)}{२!} प_० ज^२ \right\} र^{त-२} + \cdots\cdots\cdots$$

$$+ \left\{ प_त + (न - त + १) \; प_{त-१} ज^त + \cdots\cdots \right.$$

$$\left. + \frac{न(न-१)\cdots(न-त+१)}{त!} प_० ज^त \right\} र^{न-त} + \cdots + \cdots + फ(ज) = ०$$

विशेष— फ (य) पर से फ (अ), फ$'$ (अ), फ$''$ (अ) इत्यादि के मान लाघव से जानने के लिये हार्नर (Horner) साहब ने एक प्रकार बनाया है।

जैसे मानो कि फ (य) $= प_०अ^४ + प_१य^३ + प_२य^२ + प_३य + प_४$

तो फ (अ) $= प_०अ^४ + प_१अ^३ + प_२अ^२ + प_३अ + प_४$

और १०वें प्रक्रम से

$$फ' (अ) = ४प_०अ^३ + ३प_१अ^२ + २प_२अ + प_३$$

$$\frac{१}{२!}फ'' (अ) = ६प_०अ^२ + ३प_१अ + प_२$$

$$\frac{१}{३!}फ''' (अ) = ४प_०अ + प_१$$

$$\frac{१}{४!}फ'''' (अ) = प_०$$

अब फ (अ) का मान ७वें प्रक्रम से

$$प_० = प_०$$

$$प_०अ + प_१ = पा_१$$

$$पा_१अ + प_२ = प_०अ^२ + प_१अ + प_२ = पा_२$$

$$पा_२अ + प_३ = प_०अ^३ + प_१अ^२ + प_२अ + प_३ = पा_३$$

$$पा_३अ + प_४ = प_०अ^४ + प_१अ^३ + प_२अ^२ + प_३अ + प_४ = फ(अ)$$

यहाँ प्रत्येक ऊपर की पंक्ति को अ से गुण देने से और आगे के गुणक को जोड देने से नीचे की पंक्ति उत्पन्न होती है।

अब जिस प्रकार से $प_०$, $प_१$, $प_२$, $प_३$, $प_४$ को लेकर $फ(अ)$ बनाया गया है ठीक उसी प्रकार से $प_०$, $प_१$, $प_२$, $प_३$ को लेकर $फ'(अ)$ बन सकता है ।

जैसे
$$प_० = प_०$$
$$प_०अ + पा_१ = २प_०अ + प_१ = पा_४$$
$$पा_४अ + पा_२ = प_०अ^२ + पा_१अ + पा_२ = २प_०अ^२ + प_१अ + प_०अ^२ + प_१अ + प_२ = ३प_०अ^२ + २प_१अ + प_२ = पा_५$$
$$पा_५अ + पा_३ = ४प_०अ^३ + ३प_१अ^२ + २प_२अ + प_३ = फ'(अ)$$

इसी प्रकार $प_०$, $पा_४$, $पा_५$ को लेकर $\frac{१}{२}फ''(अ)$ को भी बना सकते हैं ।

जैसे
$$प_० = प_०$$
$$प_०अ + पा_४ = ३प_०अ + प_१ = पा_६$$
$$पा_६अ + पा_५ = ६प_०अ^२ + ३प_१अ + प_२ = \frac{१}{२}फ''(अ)$$

जिस प्रकार से $फ(अ)$, $फ'(अ)$, $\frac{१}{२}फ''(अ)$ बनाया है उसी प्रकार $प_०$, $पा_६$ लेकर $\frac{१}{३!}फ'''(अ)$ बन सकता है । जैसे
$$प_० = प_०$$
$$प_०अ + पा_६ = ४प_०अ + प_१ = \frac{१}{३!}फ'''(अ)$$

इस प्रकार अन्त में $$प_० = \frac{१}{४!}फ''''(अ)$$

ऊपर की क्रिया को सुभीते के लिये इस प्रकार लिखते हैं

$प_0$	$प_1$	$प_2$	$प_3$	$प_4$
	$प_0अ$	$पा_1अ$	$पा_2अ$	$पा_3अ$
	$पा_1$	$पा_2$	$पा_3$	$फ(अ)$
	$प_0अ$	$पा_4अ$	$पा_5अ$	
	$पा_4$	$पा_5$	$फ'(अ)$	
	$प_0अ$	$पा_6अ$		
	$पा_6$	$\frac{१}{२}फ''(अ)$		
	$प_0अ$			
	$\frac{१}{३!}फ'''(अ)$			

ऊर्ध्वाधर पंक्तिओं में ऊपर दो दो के योग के समान नीचे की संख्या है।

जैसे संख्याओं में जब य = २ = अ, तब

$फ(य) = ३य^४ - य^३ + ४य^२ + ८$ इसमें $फ(अ)$, $फ'(अ)$, $\frac{१}{२}फ''(अ)$, $\frac{१}{३!}फ'''(अ)$ का मान जानना हो तो ऊपर की रीति से $फ(य)$ को पूरा फल बनाने से

३	−१	+४	०	+८
	+६	१०	२८	५६
	५	१४	२८	६४
	६	२२	७२	
	११	३६	१००	
	६	३४		
	१७	७०		
	६			
	२३			

इस प्रकार से फ (अ) = ६४, फ$'$ (अ) = १००, $\frac{१}{२}$ फ$''$ (अ) = ७० और $\frac{१}{३!}$फ$'''$ (अ) = २३। यह विशेष बड़े काम का है इस पर से मूल का आसन्न व्यक्त मान लाघव से निकलता है जिसकी रीति आसन्न मान के प्रकरण में दिखाई जायगी।

३८—३७ प्रक्रम में ज के स्थान में —ज का उत्थापन देने से ऐसा एक नया समीकरण बन सकता है जिसके मूल दिए हुए समीकरण के मूल से +ज तुल्य बड़े होंगे।

३९—समीकरण के किसी एक पद का उडाना या हटाना—३८ प्रक्रम के नये समीकरण में ज के भिन्न भिन्न मान से प्रथम पद को छोड़ कर चाहे जौनसा पद उड़ा सकते हैं।

जैसे यदि फ (ज + र) =० इसमें इच्छा हो कि दूसरा पद उडे तो दूसरे पद के गुणक $प_१ + नप_०ज$ इसको शून्य के समान करने से

$$प_१ + नप_०ज = ० \therefore ज = -\frac{प_१}{नप_०}$$

अब ज के स्थान में $-\frac{प_१}{नप_०}$ इसे रख देने से फ (ज + र)

$= फ \left(-\frac{प_१}{नप_०} + र\right)$ इसमें $र^{न-१}$ यह पद न रहेगा।

इसी प्रकार यदि त + १ संख्यक पद को उडाना हो तो उसके गुणक पर से

$$प_0 ज^त + \frac{त}{न} प_1 ज^{त-1} + \frac{त(त-1)}{न(न-1)} प_2 ज^{त-2} + \cdots\cdots + \frac{(त)!(न-त)!}{त!} प_त = 0$$

ऐसा समीकरण बना, इस पर से ज का मान ले आने चाहिए जिनके वश से फ $(ज+र) = 0$ इसमें $त+1$ संख्यक पद उड़ जायगा।

जैसे तीसरा पद उडाना हुआ तो $त = 2$ इसका उत्थापन ऊपर के समीकरण में देने से

$$प_0 ज^2 + \frac{2}{न} प_1 ज + \frac{2!(न-2)!}{न!} प_2 = 0$$

अब इस वर्गसमीकरण से ज के दो मान आ जायंगे जिनके वश से तीसरा पद उड जायगा। इसमें यदि $न = 3$ तो

$$प_0 ज^2 + \frac{2}{3} प_1 ज + \frac{2!(3-2)!}{3!} प_2 = प_0 ज^2 + \frac{2}{3} प_1 ज + \frac{प_2}{3} = 0$$

इस पर से $ज^2 + \frac{2प_1}{3प_0} ज = -\frac{प_2}{3प_0}$

वा $ज^2 + \frac{2प_1}{3प_0} ज + \frac{प_1^2}{9प_0^2} = \frac{प_1^2}{9प_0^2} - \frac{3प_0 प_2}{9प_0^2}$

$$\therefore ज = \frac{-प_1 \pm \sqrt{प_1^2 - 3प_0 प_1}}{3प_0}$$

जैसे $2य^3 - 12य^2 + 8य + 10 = 0$ इस पर से एक नया समीकरण ऐसा बनाना हो जिसमें दूसरा पद उड जाय तो यहाँ ऊपर की युक्ति से

$$ज = -\frac{प_१}{नप_०} = -\frac{-१२}{३\times २} = +२$$

इस पर से नया समीकरण

$$२(र+२)^३ - १२(र+२)^२ + ८(र+२) + १०=०$$

वा $२र^३ + १२र^२ + २४र + १६ - १२र^२ - ४८र + ८र + १६ + १० - ४८ =$

$२र^३ - १६र - ६=०$

$\therefore$ $र^३ - ८ र - ३=०$ ऐसा हुआ।

और यदि $य^३ - २ य^२ + य + ३=०$ इसमें यदि तीसरा पद उड़ाना हो तो

$$ज = \frac{-प_१ \pm \sqrt{प^२_१ - ३प_०प_१}}{३प_०} = \frac{२\pm\sqrt{४-३}}{३} = \frac{२\pm१}{३}$$

$\therefore$ $ज = १$ वा $\frac{१}{३}$

जब $ज=१$ तो नया समीकरण

$$(र+१)^३ - २(र+१)^२ + (र+१) + ३ = र^३ + ३र^२ + ३र + १ - २र^२ - ४र - २ + र + १ + ३ =०$$

$\therefore$ $र^३ + र^२ + ३ =०$ ऐसा हुआ।

जब $ज = \frac{१}{३}$ तो नया समीकरण

$$(र+\tfrac{१}{३})^३ - २(र+\tfrac{१}{३})^२ + (र+\tfrac{१}{३}) + ३ =०$$

वा $र^३ + र^२ + \frac{र}{३} + \frac{१}{२७} - २र^२ - \frac{४}{३} र - \frac{२}{९} + र + \frac{१}{३} + ३$

$$= र^३ - र^२ + \frac{१}{२७} - \frac{६}{२७} + \frac{८१}{२७} + \frac{९}{२७} =०$$

∴ $र^३ - र^२ + \frac{८५}{२७} = ०$ ऐसा हुआ।

इस प्रकार से समीकरणों में पहले पद को छोड़ और किसी एक पद को उड़ा सकते हो।

४०—दिए हुए समीकरण से ऐसा एक समीकरण बनाना है जिसके मूल दिए हुए समीकरण के मूल के ज घात के तुल्य हों।

कल्पना करो कि $र = य^ज$ इसमें जो य के मान होंगे उनके ज घात के तुल्य र के मान होंगे। इस लिये $य = र^{\frac{१}{ज}}$ के हुआ। इसके उत्थापन से नया समीकरण $फ\left(र^{\frac{१}{ज}}\right) = ०$ ऐसा हुआ।

यदि $फ(य) = प_० य^न + प_१ य^{न-१} + प_२ र^{न-२} + \cdots\cdots + प_{न-१} य + प_न = ०$ ऐसा हो तो नया समीकरण

$$फ\left(र^{\frac{१}{ज}}\right) = प_० र^{\frac{न}{ज}} + प_१ र^{\frac{न-२}{ज}} + प_२ र^{\frac{न-२}{ज}} + \cdots\cdots + प_{न-१} र^{\frac{१}{ज}} + प_न = ०$$

इसमें यदि $ज = -१$ तो $र = र^{-१} = \frac{१}{य}$

और $फ\left(र^{\frac{१}{ज}}\right) = फ\left(\frac{१}{र}\right) = प_० र^{-न} + प_१ र^{१-न} + \cdots\cdots = ०$

वा $प_न र^न + प_{न-१} र^{न-१} + \cdots\cdots + प_१ र + प_० = ०$ ऐसा हुआ।

और यदि $ज = २$ तो $र = य^२$ और $य = र^{\frac{१}{२}}$ इसलिये

$$फ\left(र^{\frac{१}{ज}}\right) = फ\left(र^{\frac{१}{२}}\right) = प_०र^{\frac{न}{२}} + प_१र^{\frac{न-१}{२}} + \cdots\cdots + प_{न-१}र^{\frac{१}{२}} + प_न = ० ।$$

एकान्तर पदोँ को शून्य की ओर ले जाकर वर्ग कर देने से अकरणीगत अव्यक्त के घात में

$$\left(प_०र^{\frac{न}{२}} + प_२र^{\frac{न-२}{२}} + प_४र^{\frac{न-४}{२}} + \cdots\cdots\right)^२$$

$$= \left(प_१र^{\frac{न-१}{२}} + प_३र^{\frac{न-३}{२}} + \cdots\cdots\right)^२$$

यह समीकरण होगा। इस तरह ज के भिन्न भिन्न मान से यहाँ अनेक प्रकार के नये नये समीकरण बन सकते हैं।

४१—इस प्रक्रम में समीकरणोँ की रचना के विषय में कुछ उदाहरण क्रिया समेत दिखला कर इस अध्याय को समाप्त करते हैं।

(१) $य^३ + प_१य^२ + प_२य + प_३ = ०$ इसके मूल $अ_१, अ_२$ और $अ_३$ हैं। एक ऐसा नया समीकरण बनाना है जिसके मूल $अ_१अ_२ + अ_१अ_३$, $अ_२अ_३ + अ_१अ_२$ और $अ_१अ_३ + अ_२अ_३$ होँ।

यहाँ $अ_१अ_२ + अ_१अ_३ = अ_१(अ_२ + अ_३ + अ_१ - अ_१)$

$= अ_१(-प_१ - अ_१) = -अ_१(प_१ + अ_१)$

इसी प्रकार और दोनों मूलोँ के रूप क्रम से

$-अ_२(प_१ + अ_२)$, $-अ_३(प_१ + अ_३)$ ये होंगे। इसलिये यदि

$र = -य(प_१ + य)$ ऐसा मानेँ तो य के स्थान में क्रम से मूलोँ के तीनों मान $अ_१, अ_२, अ_३$ रख देने से नये समीकरण के मूल हो जाते हैं इसलिये

$र = -य (प_1 + य) \therefore -र = य^2 + प_1 य$

$$\therefore \quad य = \frac{-प_1 \pm \sqrt{प_1^2 - 4र}}{2}$$

दिए हुए समीकरण में इसका उत्थापन देने से

$$\left\{ \frac{-प_1 \pm (प^2_1 - 4र)^{\frac{1}{2}}}{2} \right\}^3 + प_1 \left\{ \frac{-प_1 \pm (प^2_1 - 4र)^{\frac{1}{2}}}{2} \right\}^2$$

$$+ प_2 \left\{ \frac{-प_1 + (प^2_1 - 4र)^{\frac{1}{2}}}{2} \right\} + प_3 = 0$$

ऐसा समीकरण होगा। द्वियुक्पद सिद्धान्त से फैला कर और पक्षान्तर नयनादि से र के अकरणीगत घात में इसी समीकरण का रूप बना सकते हो।

(२) $य^3 + प_2 य + प_3 = 0$ इस पर से एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसके मूल दिए हुए समीकरण के दोनों मूलों के अन्तर वर्ग के तुल्य हो। यदि दिए समीकरण के मूल $अ_1, अ_2, अ_3$ मानों तो २५वें प्रक्रम के ५वें प्रसिद्धार्थ से

$$-प_1 = अ_1 + अ_2 + अ_3 = 0, अ_1 अ_2 + अ_1 अ_3 + अ_2 अ_3 = प_2,$$
$$अ_1 अ_2 अ_3 = -प_3$$

इसलिये मूलों के वर्ग योग

$$= प^2_1 - 2प_2 = -2प_2 \text{ (३३वें प्रक्रम से)}$$

नये समीकरण के मूल $(अ_1 - अ_2)^2, (अ_2 - अ_3)^2$ और $(अ_1 - अ_3)^2$ ये हैं परन्तु $(अ_1 - अ_2)^2 = अ^2_1 - 2अ_1 अ_2 + अ^2_2 = अ^2_1 + अ^2_2 + अ^2_3 - 2अ_1 अ_2 - अ^2_3$

$$= \text{अ}^2_1 + \text{अ}^2_2 + \text{अ}^2_2 - \frac{२\text{अ}_1\text{अ}_2\text{अ}_3}{\text{अ}_3} - \text{अ}^2_3$$

$$= -२\text{प}_2 + \frac{२\text{प}_3}{\text{अ}_3} - \text{अ}^2_3$$

इसलिये (१) उदाहरण की युक्ति से

$$\text{र} = -२\text{प}_2 + \frac{२\text{प}_3}{\text{य}} - \text{य}^2$$

$$\therefore \quad \text{यर} = -२\text{प}_2\text{य} + २\text{प}_3 - \text{य}^3$$

वा $\quad \text{य}^3 + (२\text{प}_2 + \text{र})\,\text{य} - २\text{प}_3 = ० \cdots\cdots (१)$

और $\quad \text{य}^3 + \text{प}_2\text{य} \qquad + \text{प}_3 = ० \cdots\cdots (२)$

(१) और (२) के अन्तर से

$$(\text{प}_2 + \text{र})\text{य} - ३\text{प}_3 = ०$$

$$\therefore \quad \text{य} = \frac{३\text{प}_3}{\text{प}_2 + \text{र}}$$

आदि समीकरण में इसका उत्थापन देने से और लघुतम रूप करने से

$$\text{र}^3 + ६\text{य}_2\text{र}^2 + ९\text{प}^2_2\text{र} + २७\text{प}^2_3 + ४\text{प}^3_2 = ०$$

यदि $२७\text{प}^2_3 + ४\text{प}^3_2$ यह धन हो तो २१वेँ प्रक्रम से र का एक मान सम्भाव्य ऋण संख्या होगा, इसलिये दिए हुए समीकरण में एक जोड़ा असम्भव मान अवश्य रहेगा। क्योंकि इसका यह एक ऋणात्मक मान दिए हुए समीकरण के मूलों के अन्तर के वर्ग तुल्य होगा। अन्तर का वर्ग ऋण तभी होगा

जब अन्तर में असम्भव संख्या होंगी। और यदि $२७प^{२}_{३} + ४प^{३}_{२}$ यह शून्य हो तो स्पष्ट है कि दिए हुए समीकरण के दो मूल आपस में समान होंगे।

(३) $य^{३} + प_{१}य^{२} + प_{२}य + प_{३} = ०$ इस पर से एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसके मूल दिए हुए समीकरण के दो दो मूलों के अन्तर के वर्ग के समान हो। इसमें दूसरा पद उडाने के लिये $य = य' - \frac{प_{१}}{३}$ ऐसी कल्पना करो तो दिए हुए समीकरण का रूप

$$\left(य' - \frac{प_{२}}{३}\right)^{३} + प_{१}\left(य' - \frac{प_{१}}{३}\right)^{२} + प_{२}\left(य' - \frac{प_{१}}{३}\right) + प_{३}$$

$$= य'^{३} + प_{२}'\,य' + प_{३}' = ०$$

जहाँ $प'_{२} = प_{२} - \frac{प^{२}_{१}}{३};\ प'_{३} = \frac{२प^{३}_{१}}{२७} - \frac{प_{१}प_{२}}{३} + प_{२}$

नये समीकरण का प्रत्येक मूल दिए हुए समीकरण के प्रत्येक मूल से $\frac{प_{१}}{३}$ इतना बड़ा होगा, इसलिये नये समीकरण के जो दो दो मूलों का अन्तर होगा वही दिए हुए समीकरण के दो दो मूलों का क्रम से अन्तर होगा। इसलिये (२) उदाहरण की युक्ति से अभीष्ट समीकरण

$र^{३} + ६प'_{२}र^{२} + ९प'^{२}_{२}र + २७प'^{२}_{३} + ४प'_{२} = ०$ ऐसा होगा। इसमें $प'_{२}, प'_{३}$ के पूर्व आए हुए मानों का उत्थापन देने से

$$र^{३} + २(३प_{२} - प^{२}_{१})र^{२} + (३प_{२} - प^{२}_{१})^{२}र$$

$$+ \frac{(२प^{३}_{१} - ९प_{१}प_{२} + २७प_{३})^{२} + ४(३प_{२} - प^{२}_{१})}{२७} = ०$$

दिए हुए समीकरण के मूल यदि $अ_१, अ_२, अ_३$ ये हों तो २५वें प्रक्रम के ५वें प्रसिद्धार्थ से

$$(अ_१ - अ_२)^२ + (अ_२ - अ_३)^२ + (अ_३ - अ_१)^२ = -२(३प_२ - प^२_१)$$

$$(अ_१ - अ_२)^२(अ_२ - अ_३)^२ + (अ_१ - अ_२)^२(अ_३ - अ_१)^२ + (अ_२ - अ_३)^२ (अ_३ - अ_१)^२ = ३प_२ - प^२_१$$

$$(अ_१ - अ_२)^२ \; (अ_२ - _३)^२ \; (अ_३ - अ_१)_२$$

$$= -\frac{१}{२७}\left\{ (२प^३_१ - ९प_१प_२ + २७प_३)^२ + ४(३प_२ - प^२_१) \right\}$$

ऐसा होगा। इस प्रकार अनेक उदाहरण के उत्तर बड़े चमत्कार से होते हैं।

अभ्यास के लिये प्रश्न।

(१) नीचे लिखे हुए समीकरणों से ऐसे नये समीकरण बनाओ जिनके मूल दिए हुए समीकरण के मूल के तुल्य विरुद्ध चिन्ह के हों।

(१) $य^३ + २य^२ - ५ = ०$ ।

(२) $य^५ - य^३ + य - ७ = ०$ ।

(३) $य^६ - य^५ + य + ८ = ०$ ।

(४) $य^८ - य^७ + य - ११ = ०$ ।

(२) नीचे दिए हुए तीन समीकरणों से नये ऐसे तीन समीकरण बनाओ जिनके मूल क्रम से दिए हुए समीकरण के मूल से १, २, और ३ न्यून हों।

(१) $य^३ - २य^२ + ५य - ७ = ०$ ।

(२) $य^७ - य^५ + य - ११ = ०$ ।

(३) $य^३ - य^२ + य - २१ = ०$ ।

(३) नीचे लिखे हुए समीकरण से नये ऐसे समीकरण बनाओ जिनमें द्वितीय पद उड़ जायः—

(१) $य^५ - य^४ + य^३ + ५य - ७ = ०$ ।

(२) $य^६ + ५य^५ - य + ७ = ०$ ।

(३) $य^४ - १६य^३ + ५०य^२ + य - २ = ०$ ।

(४) नीचे लिखे हुए समीकरणों से ऐसे नये समीकरण बनाओ जिनमें तीसरा पद उड़ जायः—

(१) $य^३ + ५य^२ + ८य - ३ = ०$ ।

(२) $य^३ - ६य^२ + ९य - ११ = ०$ ।

(३) $य^४ - ८य^३ + १८य^२ - १६य + १४ = ०$ ।

(४) $य^४ - १८य^३ - ६०य^२ + ३य - २ = ०$ ।

(५) $य^३ + ३य^२ + \frac{१}{९}य + \frac{१}{१६} = ०$ इस से एक ऐसा समीकरण बनाओ जिनमें सब पदों के गुणक अभिन्न हों।

(६) नीचे लिखे हुए समीकरणों से ऐसे समीकरण बनाओ जिनके मूल पहले समीकरण के दो दो मूलों के अन्तर के वर्ग के समान हों। और यह भी बताओ कि दिए समीकरण के मूल कैसे होंगे।

(१) $य^३ - ८य - २ = ०$ ।

(२) $य^३ - ७य - ७ = ०$ ।

(७) $य^४ + य^२ - ८य - ९ = ०$ इस समीकरण में दिखलाओ कि य के मान, एक धन और एक ऋण सम्भाव्य संख्या होंगे जो कि -१ और २ के बीच में हैं। इनके अतिरिक्त और कोई मान सम्भाव्य संख्या नहीं है।

(८) $य^३ + प_१ य^२ + प_२ य + प_३ = ०$ इस में य के मान $अ_१$, $अ_२$, $अ_३$ हैं। ऐसे समीकरण बनाओ जिनके नीचे लिखे हुए मूल आवें:—

(१) $\frac{अ_१}{अ_२ + अ_३}, \frac{अ_२}{अ_१ + अ_३}, \frac{अ_३}{अ_१ + अ_२}$ ।

(२) $अ^२_१, अ^२_२, अ^२_३$ ।

(३) $अ_१ + अ_२, अ_१ + अ_३, अ_२ + अ_३$ ।

(४) $\frac{१}{अ_१ + अ_२}, \frac{१}{अ_१ + अ_३}, \frac{१}{अ_२ + अ_३}$ ।

(५) $\frac{अ_१}{अ_२ \, अ_३}, \frac{अ_२}{अ_१ \, अ_३}, \frac{अ_३}{अ_१ \, अ_२}$ ।

(६) $\sqrt{ज \, अ_१}, \sqrt{ज \, अ_२}, \sqrt{ज \, अ_३}$ ।

(७) $\frac{१}{२}(अ_१ + अ_२ - अ_३), \frac{१}{२}(अ_१ + अ_३ - अ_२),$
$\frac{१}{२}(अ_२ + अ_३ - अ_१($

(८) $अ_२ + अ_३ + ज \, अ_१, अ_३ + अ_१ + ज \, अ_२,$
$अ_१ + अ_२ + ज \, अ_३$ ।

(९) $\frac{अ_१}{अ_२ + अ_३ - अ_१}, \frac{अ_२}{अ_१ + अ_३ - अ_२}, \frac{अ_३}{अ_१ + अ_२ - अ_३},$

(१०) $अ_२ \, अ_३ + \frac{१}{अ_१}, अ_१ \, अ_३ + \frac{१}{अ_२}, अ_१ \, अ_२ + \frac{१}{अ_३},$

(११) $अ^२_१ + अ^२_२, अ^२_१ + अ^२_३, {}^२_२ + अ^२_३$

(१२) $\frac{अ_2}{अ_3}+\frac{अ_3}{अ_2}, \frac{अ_3}{अ_1}+\frac{अ_1}{अ_3}, \frac{अ_1}{अ_2}+\frac{अ_2}{अ_1}$

(१३) $\frac{अ^2_2+अ^2_3}{अ_2\, अ_3}, \frac{अ^2_3+अ^2_1}{अ_1\, अ_3}, \frac{अ^2_1+अ^2_2}{अ_1\, अ_2}$

(१४) $अ_2-अ_3, अ_3-अ_2, अ_3-अ_1$

(१५) $अ^2_2\, अ^2_3, अ^2_1\, अ^2_3, अ^2_1\, अ^2_2$

(१६) $\left(\frac{अ_1}{अ_2-अ_3}\right)^2, \left(\frac{अ_2}{अ_1-अ_3}\right)^2, \left(\frac{अ_3}{अ_1-अ_2}\right)^2$

(६) $य^3-५ य^2+११ य-६=०$ इसमें यदि य के मान $अ_1, अ_2, अ_3$ हों तो एक समीकरण ऐसा बनाओ जिसमें य के मान $\frac{१}{अ^2_1+अ^2_2}, \frac{१}{अ^2_1+अ^2_3}, \frac{१}{अ^2_2+अ^2_3}$ ये हों।

(१०) $य^3+प_1 य^2+प_2 य+प_3=०$ इसके मूल यदि $अ_1, अ_2, अ_3$ हों तो वह समीकरण कैसा होगा जिसके मूल $\frac{अ^3_2+अ^3_3}{अ^3_1}, \frac{अ^3_1+अ^3_3}{अ^3_2}, \frac{अ^3_1+अ^3_2}{अ^3_3}$ ये हों।

(११) $य^3+प_1 य^2+प_3=०$ इसमें यदि $प^2_1$ यह ३ $प_2$ इससे अल्प हो तो सिद्ध करो कि यहाँ ऐसा समीकरण नहीं बन सकता जिसमें तीसरा पद न रहे।

(१२) सिद्ध करो कि $य^3+प_1 य^2+प_2 य+प_3=०$ इसमें यदि $प^2_1=३ प_2$ तो एक ही बार की क्रिया में ऐसा समीकरण बन जायगा जिसमें दूसरा और तीसरा दोनों पद उड़ जायँगे।

(१३) नीचे लिखे हुए समीकरण में य का मान बताओ:—

(१) $य^३ - ६ य^२ + १२ य - ३ = ०$ ।

(२) $य^३ + ९ य^२ + २७ य - २१ = ०$ ।

(१४) सिद्ध करो कि $य^४ + प_१ य^३ + प_२ य^२ + प_३ य + प_४ = ०$ इसमें यदि

$८प_३ = प_१ (४प_२ - प^२_१)$ तो एक ही बार में एक ऐसा समीकरण बन जायगा जिसमें दूसरा और चौथा ये दोनों पद उड़ जायँगे।

(१५) नीचे लिखे हुए समीकरणों में य के मान बताओ:—

(१) $य^४ + २य^३ + ८य^२ + ७य - १० = ०$ ।

(२) $य^४ - २य^३ + ४य^२ + ३य - ६ = ०$ ।

(१६) सिद्ध करो कि $य^३ + ४य^२ + \frac{१६}{३} य + १ = ०$ इससे एक ही बार ऐसा एक नया समीकरण बना सकते हैं जिसमें दूसरा और तीसरा ये दोनों पद उड़ जायँ परन्तु इसी समीकरण को य से गुण कर जो एक चतुर्घात समीकरण बनेगा उससे एक ही बार ऐसा एक समीकरण नहीं बन सकता जिसमें दूसरा और तीसरा ये दो पद न रहें।

(१७) सिद्ध करो कि $य^न + प_१ य^{न-१} + प_२ य^{न-२} + \dots\dots + प_{न-१} य + प_न = ०$ इसमें यदि $\frac{प^२_१ (न-१)}{२न} = प_२$ तो एक ही बार में ऐसा समीकरण बन जायगा जिसमें दूसरा और तीसरा ये दोनों पद उड़ जायँगे।

४—धनर्णमूल

४२—२१-२३ और २५वें प्रक्रमों में धनात्मक तथा ऋणात्मक मूल के विषय में कुछ विशेष लिख आए हैं। अब यहाँ पर साधारण एक सिद्धान्त, कुछ परिभाषा लिखने के अनन्तर ऐसा दिखलाते हैं जिससे स्पष्ट विदित होगा कि $फ(य) = ०$ इसके कितने मूल धन और कितने ऋण होंगे।

४३—**क्रमिक पदयूथ**—अनेक पदों के यूथ में एक धन, दूसरा ऋण, तीसरा धन, चौथा ऋण इस प्रकार से एकान्तर सब पद एक चिन्ह के हों तो ऐसे पदयूथ को क्रमिक कहते हैं।

सर पद—एक चिन्ह वाले पद के अनन्तर उसी चिन्ह का यदि दूसरा पद आवे तो इस दूसरे पद को सर कहते हैं।

व्यत्यास पद—एक चिन्ह वाले पद के अनन्तर यदि भिन्न चिन्ह का दूसरा पद हो तो इस दूसरे पद को व्यत्यास कहते हैं।

जैसे $य^७ - २य^६ + ३य^५ - ४य^४ + २य^३ - ५य^२ + ३य - २$ इस में एक धन, दूसरा ऋण इस क्रम से सब पद हैं इस लिये इस पदयूथ को क्रमिक कहेंगे। और $य^९ - २य^८ - ३य^७ - ५य^६ + ४य^५ + २य^४ + ३य^३ - य^२ - य + २$ इसमें एक सर $-३य^७$ पर, दूसरा $५य^६$ पर, तीसरा $+२य^४$ पर, चौथा $+३य^३$ पर और पांचवाँ $-य$ पर है इस लिये यहाँ पांच सर हैं। और एक व्यत्यास $-२य^८$ पर, दूसरा $+४य^५$ पर, तीसरा $-य^२$ पर और चौथा $+२$ पर है इसलिये यहाँ चार व्यत्यास हैं।

इस प्रकार और उदाहरणों में भी समझ लेना चाहिए।

ऊपर की युक्ति से स्पष्ट है कि जिन पद यूथों में आदि पद सर्वदा धन रहता है उसका यदि अन्त पद धन हो तो उसमें व्यत्यास शून्य वा सम होगा और यदि अन्त पद ऋण हो तो व्यत्यास विषम होगा।

यह स्पष्ट है कि किसी पूर्ण समीकरण में (४प्रक्रम देखो) सब सर और व्यत्यासों का योग उस संख्या के तुल्य होगा जो संख्या कि य के सबसे बड़े घात में है।

जैसे ऊपर के उदाहरण में नव सब से अधिक य का घात है तो सब सर पाँच और सब व्यत्यास चार ये दोनों मिल कर भी नव ही हुए।

फ (य) =० इस पूरे समीकरण में य के स्थान में −य का उत्थापन दें तो फ (−य) में स्थिति उलट जायगी अर्थात् फ (य) में जितने सर होंगे उतने ही फ (−य) में व्यत्यास होंगे और फ (य) में जितने व्यत्यास होंगे उतने फ (−य) में सर होंगे। फ (य) =० यह यदि पूरा समीकरण न हो तो फ (य) और फ (−य) के व्यत्यासों का योग स्पष्ट है कि समीकरण के घात संख्या से अधिक नहीं हो सकता क्योंकि पूरे समीकरण के पद कम हों तो फ (य) और फ (−य) में व्यत्यासों की संख्या भी कम होगी।

४४—डेस्कार्टिस की चिन्ह रीति। धन और ऋण मूल—किसी पूरे वा अधूरे समीकरण में व्यत्यासों की संख्या से अधिक धनात्मक मूल नहीं आ सकते और किसी

पूरे समीकरण में सर की संख्या से अधिक ऋणात्मक मूल नहीं आ सकते।

इस सिद्धान्त को डेस्कार्टिस ने निकाला है इस लिये इसे डेस्कार्टिस की चिन्ह रीति कहते हैं (Descartes's rule of Signs)

इसकी उपपत्ति के लिये पहले यह दिखलाते हैं कि कोई बहुयुक् पद गुरय यदि य—अ इस गुणक से गुण दिया जाय तो गुणनफल में गुरय के व्यत्यास की संख्या से कम से कम एक अधिक व्यत्यास होगा।

मान लो कि गुरय $= + + + - - - - + - + - - - +$

गुणक $= + -$

$$\begin{array}{l} + + + - - - - + - + - - - + \\ \quad - - - + + + + - + - + + + - \end{array}$$

गुणनफल $= + \pm \pm - \mp \mp \mp + - + - \mp \mp + -$

गुणनफल में जिन स्थानों में साथ ही साथ धन ऋण दोनों चिन्ह हैं उन स्थानों के पद संशयात्मक हैं अर्थात् पद के मान के वश से वे धन वा ऋण हो सकते हैं। ध्यान पूर्वक देखने से गुणन फल में इतने धर्म पाए जाते हैं:—

(१) जितने गुरय में सर हैं उतने ही गुणनफल में संशयात्मक पद हैं। गुरय में यदि व्यत्यास सम हो तो गुणनफल में व्यत्यास विषम और यदि गुरय में व्यत्यास विषम हो तो गुणनफल में व्यत्यास सम होगा (४२वाँ प्रक्रम देखो)।

(२) गुणनफल में संशयात्मक पदों के पूर्व और अनन्तर विरुद्ध चिन्ह के पद हैं।

(३) गुणनफल के अन्त में एक चिन्ह का परिवर्तन हो गया है।

अब यदि संशयात्मकों को मान लें कि सब सर हो गए तो स्पष्ट है कि गुणनफल + + + − − − − + − + − − − + − ऐसा होगा जिसमें सब चिन्ह गुण्य ही के चिन्ह के सदृश हैं केवल अन्त में एक चिन्ह का परिवर्तन है अर्थात् एक व्यत्यास बढ़ गया है इसलिये गुणनफल में सर की संख्या महत्तम हो जाने पर भी गुणनफल में गुण्य की अपेक्षा एक व्यत्यास अधिक होता है और दूसरी स्थिति में तो और भी अधिक व्यत्यास की संख्या होगी। इसलिये यदि गुण्य को मान लो कि एक ऐसा समीकरण है जिसके ऋणात्मक और असम्भव मूल हैं तो २४ वें प्रक्रम से इसमें एक भी व्यत्यास न होगा इसलिये इसे य−अ से गुण देने से गुणनफल रूप समीकरण में य का एक धन मान अतुल्य आवेगा और कम से कम एक व्यत्यास होगा। फिर इसे य−क से गुण कर नया समीकरण बनाओ तो उसमें य के दो धनमान होंगे और व्यत्यास भी कम से कम दो होंगे। इस प्रकार य के और धन मान बढ़ाने से स्पष्ट है कि किसी समीकरण में व्यत्यास से अधिक उसके मूल धनात्मक नहीं हो सकते।

दूसरी बात के लिये मान लो कि पूरे समीकरण फ (य) =० इसमें य के स्थान में −र का उत्थापन दे दिया तो ४३वें प्रक्रम की युक्ति से फ (−र) इसकी व्यत्यास संख्या फ (य) के सर संख्या के समान होगी और ऊपर की युक्ति से फ (−र)

इसकी व्यत्यास संख्या से अधिक फ (−र) =० इसके मूल धनात्मक न आवेँगे। इसलिये फ (य) इसकी सर संख्या से अधिक फ (य) =० इसके मूल ऋणात्मक न आवेँगे।

४५—चाहे पूरा या अधूरा फ (य) =० यह समीकरण हो तो पिछले प्रक्रम की युक्ति से फ (य) इसमें जितने व्यत्यास होँगे उससे अधिक फ (य) =० इसके धनात्मक मूल न आवेँगे और फ (−य) इसमें भी जितने व्यत्यास होँगे उससे अधिक फ (−य) =० इसके मूल धनात्मक न आवेँगे परन्तु फ (य)=० इसके मूल फ (−य)=० इसके मूल के तुल्य विरुद्ध चिन्ह के हैं अर्थात् फ (य)=० इसके धनात्मक मूल फ (−य)=० इसके ऋणात्मक मूल हैं। इसलिये फ (य) और फ (−य) इन दोनोँ के व्यत्यास संख्याओँ के योग से फ (य) =० इसके धनात्मक और ऋणात्मक मूलोँ का योग अधिक न होगा।

इस पर से यह सिद्ध होता है कि चाहे फ (य)=० यह समीकरण पूरा वा अधूरा हो इसके जितने सम्भाव्य मूल होँगे वे फ (य) और फ (−य) इनके व्यत्यास संख्याओँ के योग से अधिक न होँगे।

जैसे यदि फ (य)=य^{४} + ५य^{२} + ७य − ९=०

तो फ (−य)=य^{४} + ५य^{२} − ७य − ९=०

फ (य) में एक व्यत्यास है इसलिये फ (य)=० इसका एक से अधिक धनात्मक मूल न आवेगा और फ (−य) इसमें भी एक ही व्यत्यास है इसलिये फ (−य)=० इसका भी एक से अधिक धनात्मक मूल न आवेगा वा फ (य)=० इसका एक से अधिक ऋणात्मक मूल न आवेगा।

अर्थात् दोनों व्यत्यासों के योग दो से अधिक फ (य)=० इसके सम्भाव्य मूल न आवेंगे। परन्तु २२वें प्रक्रम से यहाँ य के सम्भाव्य मान दो से कम न आवेंगे इसलिये स्पष्ट है कि इस समीकरण के दो ही सम्भाव्य मूल आवेंगे जिनमें एक धनात्मक और एक ऋणात्मक होगा।

यदि फ (य)=$य^३+प_२य+प_३$=०......(१) इसमें $प_२$ और $प_३$ दोनों धन संख्या हों तो यहाँ व्यत्यास का अभाव हुआ इसलिये इस समीकरण का कोई धनात्मक मूल न आवेगा। यही बात २१वें प्रक्रम से भी सिद्ध होगी।

ऊपर के समीकरण में यदि य के स्थान में −य का उत्थापन दें तो फ (−य)=$-य^३-प_२य+प_३$=०=$य^३+प_२य-प_३$ इसमें एक व्यत्यास हुआ इसलिये (१) समीकरण का एक ही मूल ऋणात्मक आवेगा। परन्तु २१वें प्रक्रम से सिद्ध है कि फ (य)=० इसके मूलों में से एक अवश्य ऋणात्मक आवेगा। इसलिये दोनों नियमों के बल से स्पष्ट हुआ कि यहाँ अवश्य एक मूल ऋणात्मक होगा और वही एक कोई सम्भाव्य संख्या है। ऊपर दिया हुआ एक त्रिघात समीकरण है इसलिये इसके तीन मूल आवेंगे। तिनमें सिद्ध हो चुका है कि एक मूल ऋणात्मक सम्भाव्य संख्या होगा। इसलिये बाकी दो मूल अवश्य असंभाव्य संख्या होंगे।

फिर यदि फ (य)=$य^३-प_२य+प_३$=० जहाँ $प_२$ और $प_३$ धन संख्या हैं तो यहाँ व्यत्यास की संख्या दो है इसलिये इस समीकरण के दो से अधिक धनात्मक मूल न आवेंगे और फ (−य)=$य^३+प_२य-प_३$=० इसमें एक व्यत्यास है इसलिये फ (य)=० इसका एक से अधिक ऋणात्मक मूल न आवेगा।

परन्तु २१वेँ प्रक्रम से सिद्ध है कि इसका कम से कम एक मूल ऋणात्मक अवश्य आवेगा, इसलिये दोनों नियमों के मिलाने से अवश्य एक ही कोई ऋणात्मक मूल होगा। यह तो सिद्ध हुआ परन्तु बाकी दो मूलों के विषय में कुछ भी कहा नहीँ जा सकता कि वे धनात्मक सम्भाव्य वा असम्भव संख्या होंगे। इसलिये यहाँ डेस्कार्टिस की युक्ति से काम नहीँ चला क्योंकि उनकी युक्ति ने केवल इतना ही पता दिया कि फ (य)=० इसके दो से अधिक धनात्मक मूल नहीँ आवेंगे। इसलिये सम्भव है कि कोई मूल धनात्मक न हो। परन्तु यहाँ ४१वेँ प्रक्रम के दूसरे उदाहरण से एक नया समीकरण

$$र^{३} - ६प_{२}र^{२} + ९प^{२}_{२}र + २७प^{२}_{३} - ४प^{३}_{२} = ०$$

ऐसा बनैगा जिसके मूल पहले समीकरण के मूलों के अन्तरवर्ग के समान होंगे। इसलिये यहाँ डेस्कार्टिस की युक्ति वा २५वेँ प्रक्रम के २ प्रसिद्धार्थ से यदि $२७प^{२}_{३} - ४प^{३}_{२}$ यह ऋण हो तो समीकरण का कोई मूल ऋणात्मक न आवेगा इसलिये फ (य)=० इसका कोई मूल असम्भव संख्या न होगा। परन्तु यदि $२७प^{२}_{३} - ४प^{३}_{२}$ यह धन होगा तब तो २१वेँ प्रक्रम से समीकरण का कम से कम एक मूल अवश्य ऋणात्मक होगा। इसलिये फ (य)=० इसके दो मूल अवश्य असम्भव होंगे।

४६—यदि ध्यान देकर विचारो तो २५वेँ प्रक्रम से सब प्रसिद्धार्थ डेस्कार्टिस की युक्ति से निकल सकते हैं और २३वेँ प्रक्रम में जो सिद्धान्त है वह भी डेस्कार्टिस की युक्ति और २१-२२वेँ प्रक्रम के सिद्धान्त से सिद्ध हो सकता है।

४७—यदि यह विदित हो कि फ (य)=० इस न घात के अधूरे समीकरण के सब मूल सम्भाव्य संख्या हैं और फ (य) में अन्त पद य से स्वतन्त्र है तो फ (य) के व्यत्यास व्य$_1$ के तुल्य इस समीकरण के धनात्मक मूल और फ (−य) के व्यत्यास व्य$_2$ के तुल्य ऋणात्मक मूल होंगे क्योंकि सब सम्भाव्य मूल व्य$_1$ + व्य$_2$ इससे अधिक नहीं हो सकते (४५वाँ प्रक्रम देखो) और व्य$_1$ + व्य$_2$ यह समीकरण के सबसे बड़े घात न संख्या से अधिक भी नहीं हो सकता (४३वाँ प्रक्रम देखो) परन्तु यह जानते हैं कि सब मूल सम्भाव्य हैं इसलिये वे इस न घात समीकरण में न संख्या के तुल्य होंगे। दोनों नियमों के मिलान से स्पष्ट है कि व्य$_1$ + व्य$_2$=न ऐसा होगा। यदि ऐसा न हो तो एक नियम के मानने से दूसरे का व्यभिचार हो जायगा।

जब व्य$_1$ + व्य$_2$=न तो धनात्मक मूल अवश्य व्य$_1$ के समान होंगे। यदि कहो कि व्य$_1$ के समान न होंगे तो ४५वें प्रक्रम से वे व्य$_1$ से न्यून होंगे। इसलिये व्य$_1$ से न्यून को व्य$_1$ + व्य$_2$ =न इसमें घटा देने से व्य$_2$ से अधिक जो शेष बचैगा उसके समान ऋणात्मक मूल होंगे परन्तु ऊपर सिद्ध हो चुका है कि ऋणात्मक मूलों की संख्या व्य$_2$ से अधिक नहीं हो सकती इसलिये धनात्मक मूलों की संख्या व्य$_1$ से न्यून मानना असम्भव हुआ। इससे निश्चय हुआ कि व्य$_1$ के ही समान धनात्मक मूलों की संख्या और व्य$_2$ के समान ऋणात्मक मूलों की संख्या होती हैं।

जैसे यह जानते हैं कि फ (य)=य^3 − १९य + ३०=० इस समीकरण के सब मूल सम्भाव्य हैं तो फ (य) में व्यत्यास की

संख्या दो हैं इसलिये समीकरण के दो मूल धनात्मक और फ (−य) इसमें एक व्यत्यास होने से एक ही मूल ऋणात्मक होगा।

फ (य)=० इस न घात समीकरण को $य^त$ इससे गुण देने से नया समीकरण न+त घात का होगा जिसके त मूल शून्य और ऊपर की युक्ति से सब सम्भाव्य मूलों की संख्या न के तुल्य वा फ (य) और फ (−य) इनके व्यत्यास $व्य_1$ और $व्य_2$ के योग के समान होंगी इसलिये यहाँ यदि त+न = म तो न=म − त=$व्य_1$ + $व्य_2$ । इस पर से यह भी सिद्ध कर सकते हो कि फ (य)=० इसमें यदि अन्तिम पद य से स्वतन्त्र न हो और यह विदित हो कि इसके सब मूल सम्भाव्य हैं तो य के सब से छोटी घात संख्या त के समान शून्य मूल और फ (य) और फ (−य) के व्यत्यासों के समान क्रम से धनात्मक और ऋणात्मक मूल होंगे।

४८—जब ४५वें प्रक्रम से सिद्ध है कि फ (य) = ० इस समीकरण के सम्भाव्य मूल फ (य) के व्यत्यास $व्य_1$ और फ (−य) के व्यत्यास $व्य_2$ के योग $व्य_1$ + $व्य_2$ से अधिक नहीं हो सकते तब सब मूलों के योग न संख्या में घटा देने से शेष न−($व्य_1$ + $व्य_2$) इससे अल्प असम्भाव्य मूल न होंगे। अल्पतम असम्भाव्य मूल इस न−($व्य_1$ + $व्य_2$) संख्या के समान होंगे।

४९—किसी पूरे म घात समीकरण के $आ \cdot य^म$ और $का \cdot य^ब$ इन दो पदों के वश से फ (य) और फ$(−य)^ब$ में जो व्यत्यास होंगे—

कल्पना करो कि किसी पूरे म घात समीकरण के आ·य^{म} और का·य^{ब} पदों के बीच बहुत से पद जिनका योग २त$_{१}$ सम संख्या है, उड़ गए हैं तो यदि म सम होगा तो इसमें २त$_{१}$ +१ विषम संख्या घटा देने से शेष ब यह विषम होगा और यदि म विषम हो तो २त$_{१}$ + १ विषम को घटा देने से शेष ब सम होगा। इसलिये य^{म} और य^{ब} दोनों सम, विषम वा विषम, सम य के घात होंगे।

यदि आ और का एक ही चिन्ह के होंगे तो +य के मान में एक व्यत्यास और −य के मान में एक भी व्यत्यास न होगा। इसलिये दोनों स्थितियों में आ·य^{म} और का·य^{ब} इन दो पदों के वश से फ (य) और फ (−य) में जो व्यत्यास होंगे उनका योग एक होगा।

इस प्रकार से का·य^{ब} और खा·य^{प} इन पदों के बीच भी यदि सम पद २त$_{२}$ उड़ गए हों तो का·य^{ब} और खा·य^{प} के वश से भी फ (य) और फ (−य) के व्यत्यासों का योग एक ही होगा। यों दो दो पदों के बीच व्यत्यासों का योग एक एक होगा। मानो कि दो दो पदों के बीच २त$_{१}$, २त$_{२}$, २त$_{३}$,……, २त$_{ग}$ पद उड़ गए हैं तो पूरे समीकरण के पद

$$म + १ = १ + (२त_{१} + १) + (२त_{२} + १) + (२त_{३} + १) + \cdots + (२त_{ग} + १)$$

$$= १ + ग + (२त_{१} + २त_{२} + \cdots + २त_{ग})$$

$$\therefore म = ग + (२त_{१} + २त_{२} + \cdots + २त_{ग})$$

इसमें फ (य) और फ (−य) के व्यत्यासों के योग ग को घटा देने से कम से कम असम्भव मूल=२त$_{१}$ + २त$_{२}$ + …… + २त$_{ग}$=उड़े हुए पदों की संख्या।

कल्पना करो कि आ·$य^{म}$ और का·$य^{व}$ के बीच विषम पद $२त_{१}+१$ उड़ गए हैं तो म यदि सम होगा तो उसमें सम $२त_{१}+२$ घटा देने से व भी सम होगा और म यदि विषम होगा तो उसमें $२त_{१}+२$ सम घटा देने से व भी विषम ही होगा। इसलिये यदि आ और का एक ही चिन्ह के होंगे तो +य वा −य के वश से आ·$य^{म}$ और का·$य^{व}$ में एक भी व्यत्यास न होगा इसलिये व्यत्यासों का योग भी शून्य होगा और यदि आ और का विरुद्ध चिन्ह के होंगे तो +य से एक और −य से भी एक व्यत्यास होगा इसलिये व्यत्यासों का योग दो होगा।

इसी प्रकार का·$य^{व}$ और खा·$य^{प}$ में भी का, खा के एक चिन्ह के होने से व्यत्यासों का योग शून्य और विरुद्ध चिन्ह के होने से व्यत्यासों का योग दो होगा।

यहाँ भी यदि दो दो पदों के बीच $२त_{१}+१$, $२त_{२}+१$,... $२त_{ग}+१$ पद उड़े हुए मानो और इन पर से पूरे समीकरण के पद बनाओ तो

$$म+१=१+\left\{(२त_{१}+१)+१\right\}+\left\{(२त_{२}+१)+१\right\}$$
$$+\cdots\cdots+\left\{(२त_{ग}+१)+१\right\}$$

$$\therefore म=\left\{(२त_{१}+१)+१\right\}+\left\{(२त_{२}+१)+१\right\}$$
$$+\cdots\cdots+\left\{(२त_{ग}+१)+१\right\}$$

इसमें यदि आ, का, खा इत्यादि में दो दो के एक और विरुद्ध चिन्ह के वश से व्यत्यासों का योग जो शून्य वा दो होते हैं घटाओ तो प्रत्येक खण्ड में शेष $२त_१+२$, $२त_२+२$,......इत्यादि वा $२त_१$, $२त_२$......इत्यादि होंगे। इसलिये हर एक उड़े हुए झुण्ड के वश से आ, का,....इत्यादि दो दो के एक चिन्ह के होने से $२त_१+२$,......इत्यादि, और विरुद्ध चिन्ह के होने से $२त_१$,...इत्यादि कम से कम असम्भव मूल होंगे।

(१) जैसे $य^८-य^३-२=०$ इसमें पहले दो पदों के बीच चार पद और दूसरे दो पदों के बीच दो पद उड़ गए हैं और ये सम हैं इसलिये इनके योग ४ + २ छ से कम इस समीकरण के मूल असम्भव न होंगे।

(२) $य^७-२य^३-४य-२=०$ इसमें पहिले दो पदों के बीच विषम ३ पद उड़ गए हैं और दोनों पदों के गुणक विरुद्ध चिन्ह के हैं इसलिये उनके वश से कम से कम $३+१-२=२$ समीकरण के असम्भव मूल हुए। दूसरे दो पदों $-२य^३$, $-४य$ इनके बीच एक पद विषम उड़ गया है और इन दोनों के गुणक एक चिन्ह के हैं इसलिये इनके वश से कम से कम $१+१-०=२$ समीकरण के असम्भव मूल हुए। इसलिये दिए हुए समीकरण के मूल इन दोनों के योग चार से कभी कम असम्भव न होंगे।

(३) और $य^६-३य^४-२=०$ इसमें पहिले दो पदों के बीच चार पद उड़ गए हैं और ये सम हैं इसलिये इनके वश से समीकरण के ४ असम्भव मूल हुए और $-३य^४$, -२, इन

दोनों के बीच ३ पद उड़े हैं और ये विषम और दोनों पदों के गुणक एक जाति के हैं इसलिये इनके वश से (२त, + १) + १ =३ + १=४ असम्भव मूल हुए। इसलिये दोनों के योग ८ से कम समीकरण के असम्भव मूल न होंगे।

इसी प्रकार और उदाहरणों में जान लेना चाहिए।

५०—४९वें प्रक्रम से स्पष्ट होता कि फ (य) और फ (—य) के व्यत्यासों के योग $व्य_१ + व्य_२$ इसको यदि समीकरण की घात संख्या म में घटाओ तो शेष $म - व्य_१ - व्य_२$ यह सर्वदा सम ही रहता है इसलिये २७वें प्रक्रम की युक्ति से कह सकते हो कि किसी फ (य)=० इस म घात समीकरण में फ (य) के व्यत्यास $व्य_१$ और फ (—य) के व्यत्यास $व्य_२$ के योग $व्य_१ + व्य_२$ को म में घटाने से शेष $म - व्य_१ - व्य_२$ से २,४,६ इत्यादि सम संख्या अधिक समीकरण के असम्भव मूल होंगे वा कम से कम $म - व्य_१ - व्य_२$ इसके तुल्य असम्भव मूल होंगे। इसलिये इसमें जिस इष्ट गुणित २ को जोड़ देने से संख्या म से न्यून और सैक इष्ट गुणित २ को जोड़ देने से संख्या म से अधिक हो तो उस इष्ट गुणित २ के जोड़ देने से जो म से न्यून संख्या हुई है उससे अधिक असम्भव मूल नहीं हो सकते।

जैसे ऊपर के प्रक्रम के (३) उदाहरण में कम से कम असम्भव मूल की संख्या$=म - व्य_१ - व्य_२ =$८ आई है इसमें एक गुणित २ के जोड़ने से १० संख्या म=९ से अधिक होती है इसलिये ८ से अधिक असम्भव मूल नहीं हो सकते। दोनों नियमों के मिलान से सिद्ध होता है कि यहाँ अवश्य ही

असम्भव मूल ८ आवेंगे इसलिये इसे ८ में घटा देने से निश्चय हुआ कि यहाँ एक मूल अवश्य सम्भाव्य आवेगा।

इसी प्रकार (२) उदाहरण में सिद्ध होता है कि ६ से अधिक असम्भाव्य मूल न होंगे इसलिये इसे म=७ में घटा देने से निश्चय हुआ कि इस समीकरण का कम से कम एक मूल अवश्य सम्भाव्य आवेगा। यही बात २१वें प्रक्रम से भी सिद्ध होती है।

विद्यार्थिओं को चाहिए कि इस प्रकार से जिस समीकरण में जैसा सम्भव हो विचार कर धनर्ण मूलों का पता लगावें।

सर और व्यत्यास के स्मरणार्थ श्लोक।

आवृत्तिर्यत्र चिह्नस्य पदे स सरसंज्ञकः।
निवृत्तिर्यत्र चिह्नस्य पदे व्यत्यास संज्ञकः॥ १॥

दोहा

पिछले पद के चिन्ह हो जेहि पद में सर सोय।
भिन्न चिन्ह जेहि में बसै बुध व्यत्यास सो होय॥ १॥

धनर्णमूल के स्मरणार्थ श्लोक।

व्यत्यासमानादधिकानि न स्युर्नूनं स्वमूजानि समीकृतौ हि।
सराख्यमानादधिका ऋणाख्यमितिस्तथा पूर्ण समीकृतौ न॥ २॥

दोहा

समीकरण के मूल धन व्यत्यासाधिक नाहिं।
ऋणमिति सर से अधिक नहिं पूर्ण समीकृति माहिं॥ २॥

अभ्यास के लिये प्रश्न

(१) क्रमिक पद किसे कहते हैं।

(२) सर और व्यत्यास किसे कहते हैं।

(३) यदि फ (य)=० यह पूर्ण समीकरण हो तो फ (य) में जितने सर होंगे उतने ही फ (−य) में व्यत्यास होंगे, इसे सिद्ध करो।

(४) सिद्ध करो कि किसी अधूरे फ (य)=० इस न घात समीकरण में फ (य) और फ (−य) के व्यत्यासों का योग न से अधिक नहीं हो सकता।

(५) दिखलाओ कि $य^{५} - २य^{२} + ४ = ०$ इसके कम से कम दो असम्भव मूल होंगे।

(६) साबित करो कि $य^{७} - ३य^{४} + य^{३} - २ = ०$ इसके अधिक से अधिक ६ असम्भव मूल होंगे।

(७) डेस्कार्टिस की युक्ति की उपपत्ति क्या है।

(८) फ (य)=० इस अधूरे न घात समीकरण के सब मूल यदि सम्भाव्य हों तो सिद्ध करो कि फ (य) और फ (−य) के व्यत्यासों का योग न के समान होगा।

(९) न घात का फ (य)=० यह पूरा और फा (य)=० यह अधूरा ये दो समीकरण हैं जिनके सब मूल सम्भाव्य हैं और फ (य) और फा (य) के व्यत्यास भी तुल्य हैं तो दिखाओ कि फा (−य) के व्यत्यास फ (य) के सर के तुल्य होंगे।

५—तुल्यमूल

५१—कभी कभी ऐसा भी हो सकता है कि समीकरण के बहुत से मूल तुल्य ही आवें। जैसे फ (य)=(य − ३)^{३}=० वा य^{३} − ९य^{२} + २७य − २७=(य − ३) (य − ३) (य − ३)=०। स्पष्ट है कि इसके तीनों मूल समान ही हैं। इसलिये समीकरणों में इस बात की परीक्षा करना कि इनके कितने मूल तुल्य हैं यह आवश्यक हुआ। मान लो कि मूल अ$_{१}$ त − वार, अ$_{२}$ थ − वार, अ$_{३}$ द − वार इत्यादि आए हैं तो ऐसी स्थिति में फ (य)=प$_{०}$ (य − अ$_{१}$)^{त} (य − अ$_{२}$)^{थ} (य − अ$_{३}$)^{द} ......=० इस प्रकार का समीकरण होगा।

५२—अकरणीगत अभिन्न अव्यक्त य का फल फ (य) यदि फा (य) × फि (य) × फी (य) × .... इसके बराबर है तो फ′ (य) प्रथमोत्पन्न फल फा′ (य) × फि (य) × फी (य) + फि′ (य) × फा (य) × फी (य)··· + फी′ (य) × फा (य) × फि (य).........+.........इत्यादि के समान होगा।

कल्पना करो कि फ (य)=स=फा (य) × फि (य)

तो १०वें प्रक्रम से स′=फा (य + च) × फि (य + च)

और स′ − स=फा (य + च) × फि (य + च) − फा (य) × फि (य)

$$=\text{फा}(\text{य}+\text{च})\times\text{फि}(\text{य}+\text{च})$$

$$-\text{फा}(\text{य}+\text{च})\times\text{फि}(\text{य})+\text{फा}(\text{य}+\text{च})\times\text{फि}(\text{य})$$

$$-\text{फा}(\text{य})\times\text{फि}(\text{य})$$

$$=\text{फा}(\text{य}+\text{च})\left\{\text{फि}(\text{य}+\text{च})-\text{फि}(\text{य})\right\}$$

$$+\text{फि}(\text{य})\left\{\text{फा}(\text{य}+\text{च})-\text{फा}(\text{य})\right\}$$

दोनों पक्षों में च का भाग देने से

$$\frac{\text{स}'-\text{स}}{\text{च}}=\text{फा}(\text{य}+\text{च})\left\{\frac{\text{फि}(\text{य}+\text{च})-\text{फि}(\text{य})}{\text{च}}\right\}$$

$$+\text{फि}(\text{य})\left\{\frac{\text{फा}(\text{य}+\text{च})-\text{फा}(\text{य})}{\text{च}}\right\}$$

च को शून्य मानने से

$$\frac{\text{स}'-\text{स}}{\text{च}}=\text{फ}'(\text{य})=\text{फि}'(\text{य})\times\text{फा}(\text{य})+\text{फा}'(\text{य})\times\text{फि}(\text{य}),\ldots(१)$$

यदि फा (य) वा फि (य), $(\text{य}-\text{अ})^{\text{न}}$ इस प्रकार का हो तो मान लो कि

$\text{स}=(\text{य}-\text{अ})^{\text{न}}$ । इसलिये १०वें प्रक्रम से

$$\text{स}'=(\text{य}-\text{अ}+\text{च})^{\text{न}}=\left\{(\text{य}-\text{अ})+\text{च}\right\}^{\text{न}}$$

$$=(\text{य}-\text{अ})^{\text{न}}+\text{न}\cdot\text{च}(\text{य}-\text{अ})^{\text{न}-१}+\text{आ}_०\text{च}^२+\text{आ}_१\text{च}^३+\cdots$$

$$\therefore\frac{\text{स}'-\text{स}}{\text{च}}=\text{न}(\text{य}-\text{अ})^{\text{न}-१}+\text{आ}_०\text{च}+\text{आ}_१\text{च}^२+\cdots\cdots\cdots$$

अ को शून्य मानने से

$$फा'(य)=न(य-अ)^{न-१}=\frac{न(य-अ)^{न}}{(य-अ)}=\frac{न\, फा(य)}{य-अ}, \dots\dots\dots (२)$$

यदि $फ(य)=फा(य)\times फि(य)\times फी(य)\dots\dots\dots\dots$ तो (१) समीकरण से सिद्ध कर सकते हो कि

$$फ'(य)=फा'(य)\times फि(य)\times फी(य) + फि'(य)\times फा(य)\times फी(य) + \dots\dots\dots (३)$$

५३—यदि फ (य) और फ′ (य) में अव्यक्तात्मक कोई महत्तमापवर्त्तन आवे तो फ (य)=० के तुल्य-मूल आवेंगे और यदि महत्तमापवर्त्तन अव्यक्तात्मक न आवे तो तुल्य मूल न आवेंगे।

५१वें प्रक्रम के समीकरण को जिसके अनेक मूल तुल्य आते हैं लेने से

$$फ(य)=प_{०}\,(य-अ_{१})^{त}\,(य-अ_{२})^{थ}\,(य-अ_{३})^{द}\dots\dots\dots$$

५२वें प्रक्रम के (२) और (३) समीकरण से

$$फ'(य)=प_{०}\Big\{त\,(य-अ_{१})^{त-१}\,(य-अ_{२})^{थ}\,(य-अ_{३})^{द}\dots\dots\dots + थ(य-अ_{२})^{थ-१}\,(य-अ_{१})^{त}\,(य-अ_{३})^{द}\dots\dots\dots + द(य-अ_{३})^{द-१}\,(य-अ_{१})^{त}\,(य-अ_{२})^{थ}\dots+\dots\Big\}$$

$$=\frac{\text{त फ}(\text{य})}{\text{य}-\text{अ}_1}+\frac{\text{थ फ}(\text{य})}{\text{य}-\text{अ}_2}+\frac{\text{द फ}(\text{य})}{\text{य}-\text{अ}_3}+\cdots\cdots$$

$$=\text{फ}(\text{य})\left\{\frac{\text{त}}{\text{य}-\text{अ}_1}+\frac{\text{थ}}{\text{य}-\text{अ}_2}+\frac{\text{द}}{\text{य}-\text{अ}_3}+\cdots\cdots\right\}$$

$$=\text{प}_0\,(\text{य}-\text{अ}_1)^{\text{त}}\,(\text{य}-\text{अ}_2)^{\text{थ}}\,(\text{य}-\text{अ}_3)^{\text{द}}\cdots\cdots$$

$$\left\{\frac{\text{त}}{\text{य}-\text{अ}_1}+\frac{\text{थ}}{\text{य}-\text{अ}_2}+\frac{\text{द}}{\text{य}-\text{अ}_3}+\cdots\cdots\right\}$$

इस से स्पष्ट है कि $\text{फ}'(\text{य})$ के प्रत्येक पद में गुण्य गुणक रूप अव्यक्त खण्ड $(\text{य}-\text{अ}_1)^{\text{त}-1}\,(\text{य}-\text{अ}_2)^{\text{थ}-1}\,(\text{य}-\text{अ}_3)^{\text{द}-1}$ ······यह रहेगा। इसलिये ऐसी स्थिति में फ (य) और $\text{फ}'(\text{य})$ में अवश्य अव्यक्तात्मक कोई महत्तमापवर्त्तन निकलेगा जिससे सिद्ध होता है कि यदि फ (य) और $\text{फ}'(\text{य})$ में कोई महत्तमापवर्त्तन आवे तो अवश्य फ (य)=० के तुल्य मूल आवेंगे और यदि महत्तमापवर्त्तन अव्यक्तात्मक न आवे तो तुल्य मूल न आवेंगे क्योंकि जब त=थ=द=१ तब तुल्य मूल न आवेंगे और तब $\text{फ}'(\text{य})$ में भी $(\text{य}-\text{अ}_1)^{\text{त}-1}\,(\text{प}-\text{अ}_2)^{\text{थ}-1}\,(\text{य}-\text{अ}_3)^{\text{द}-1}=1$ यह होने से

$$\text{फ}'(\text{य})=\text{प}_0\Big\{(\text{य}-\text{अ}_2)(\text{य}-\text{अ}_3)\cdots\cdots\cdots$$

$$+(\text{य}-\text{अ}_1)(\text{य}-\text{अ}_3)\cdots+(\text{य}-\text{अ}_1)(\text{य}-\text{अ}_2)\cdots+\cdots\Big\}$$

जिसमें फ (य) का कोई गुण्य गुणकरूप अव्यक्तात्मक महत्तमापवर्त्तन आवे।

जैसे यदि $\text{फ}(\text{य})=\text{य}^4-9\text{य}^3+29\text{य}^2-39\text{य}+18=0$

यहाँ $\text{फ}'(\text{य})=4\text{य}^3-27\text{य}^2+58\text{य}-39$

क्रिया करने से फ (य) और फ' (य) का महत्तमापवर्त्तन य — ३ आता है इससे जान पड़ा कि फ (य) में $(य-३)^२$ यह एक गुणकरूप खण्ड है।

$$इस पर से फ(य) = (य-३)^२ (य^२-३य+२)$$
$$= (य-३)^२ (य-१)(य-२) = ०$$

इसलिये य के मान, ३, ३, १, २ ये हुए।

इसी प्रकार $फ(य) = २य^४ - ८य^३ + १४य^२ - २४य + २४ = ०$

इसमें फ (य) और फ' (य) का महत्तमापवर्त्तन य — २ आता है इसलिये $फ(य) = (य-२)^२ (२य^२+६) = ०$। इसमें य के मान २, २, $+\sqrt{-३}$, $-\sqrt{-३}$ ये हुए।

५४—२६वें प्रक्रम से स्पष्ट है कि

$$फ(य) = प_० (य-अ_१)(य-अ_२)(य-अ_३) \cdots\cdots$$
$$फा(य) = प'_० (य-अ'_१)(य-अ'_२)(य-अ'_३) \cdots\cdots$$

इनका रूप जो ऊपर गुण्य गुणक रूप खण्ड में दिखलाया है वह एक ही यही है दूसरा इसके अतिरिक्त नहीं है जिसमें $(य-अ_१)$……इत्यादि खण्डों के एकाधिक घात हों वा $(य-अ_१)$……इत्यादि खण्डों में से कई एक न हों।

अब य का एक फल फि (य) ऐसा हो जिसमें य का सब से बड़ा घात हो और वह फ (य), फा (य) को निःशेष करता हो तो फि (य) उन अव्यक्त के एक घात खण्डों के घात के तुल्य होगा जो फ (य) और फा (य) में उभयनिष्ठ हैं।

इसी फि (य) को फ (य) और फा (य) का महत्तमापवर्त्तन कहते हैं।

५५—५३वें प्रक्रम से स्पष्ट है कि यदि फ (य) में $(य-अ_१)^त$ एक खण्ड रहेगा तो फ′ (य) में $(य-अ_१)^{त-१}$ खण्ड रहेगा। इसलिये फ (य)=० इसके यदि त मूल जो अ के समान होंगे तो फ′ (य)=० इसके त−१ मूल अ के समान होंगे। इसलिये यदि त−१ यह रूप से अधिक हो तो फ′ (य) और फ″ (य) में भी कोई अव्यक्तात्मक महत्तमापवर्त्तन होगा और पूर्व युक्ति से फ″ (य)=० इसके त−२ मूल $अ_१$ के समान होंगे। इस प्रकार से आगे भी क्रिया करते जाओ तो सिद्ध होगा कि फ (य)=० जिसके $(य-अ_१)^त$ खण्ड हों जिनके कारण समीकरण के त तुल्य मूल $अ_१$ के समान आते ह तो फ′ (य), फ″ (य),……$फ^{त-१}$ (य) सब शून्य के समान होंगे यदि य=अ।

जैसे यदि

$$फ(य)=य^५-२य^४+२य^३+८य^२-७य+२$$

$$फ'(य)=५य^४-८य^३+६य^२+१६य-७$$

$$फ''(य)=२०य^३-२४य^२+१२य+१६$$

$$फ'''(य)=६०य^२-४८य+१२$$

$$\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots$$

इनमें यदि य=१, तो फ(य), फ′(य), फ″(य), फ‴(य)…… इस श्रेढी में आदि के तीन शून्य होते हैं परन्तु फ″ (य)…… इत्यादि शून्य के तुल्य नहीं होते इसलिये स्पष्ट हुआ कि फ(य) में $(य-१)^३$ यह एक खण्ड है इस पर से

$$फ(य)=(य-१)^३(य^२+य-२)।$$

यदि यह जानते हैं कि $फ(य)=य^४+त_२य^२+त_३य+त_४=०$ इसके तीन मूल तुल्य हैं तो $त_२$, $त_३$ और $त_४$ में आपस में क्या सम्बन्ध है।

यहाँ फ $(य)=य^४+त_२य^२+त_३य+त_४$

फ' $(य)=४य^३+२त_२य+त_३$

फ'' $(य)=१२य^२+२त_२$

इसलिये फ'' (य) को शून्य के तुल्य मानने से

$$य^२=-\frac{२त_२}{१२}=-\frac{त_२}{६} \quad \dotfill (१)$$

इसका उत्थापन फ (य)=० और फ' (य)=० में देने से

$$-\frac{५त_२^२}{३६}+त_३य+त_४=० \quad \dotfill (२)$$

$$य\left(-\frac{२त_२}{३}+२त_२\right)+त_३=० \quad \dotfill (३)$$

(३) से $$य=-\frac{३त_३}{४त_२} \quad \dotfill (४)$$

इसका उत्थापन (२) में देने से

$$त_४-\frac{३त_३^२}{४त_२}-\frac{५त_२^२}{३६}=० \quad \dotfill (५)$$

(१) और (४) से

$$त_३^२=-\frac{८त_२^३}{२७} \quad \dotfill (६)$$

इसका उत्थापन (५) में देने से

$$त_४=-\frac{त_२^२}{१२} \quad \dotfill (७)$$

इस प्रकार (६)वेँ और (७)वेँ से परस्पर संबन्ध जान पड़ा। इसलिये ऐसे जिस समीकरण मेँ गुणकोँ मेँ ऐसे संबन्ध पाए जायँ तो कहेँगे कि समीकरण के तीन मूल अवश्य तुल्य आवेँगे।

५६—फ (य) = ० मेँ जितने एक घात के खण्ड एक बार, दो बार········त बार आए होँ उनके मूल जानना।

कल्पना करो कि फ (य)=० मेँ जितने एक घात के खण्ड एक एक बार हैँ उनका मान $या_१$, जितने दो दो बार हैँ उनका मान $या_२$,······जितने त त बार हैँ उनका मान $या_त$ और जितने म म बार आए हैँ उनका मान $या_म$ तो

$$फ (य) = या_१\ या^२_२\ या^३_३ \cdots\cdots या^त_त\ या^म_म$$

इस मेँ मानोँ कि फ (य) और फ′ (य) का महत्तमापवर्त्तक फ₁ (य) है तो

$$फ_१ (य) = या_२\ या^२_३ \cdots\cdots\cdots या^{म-१}_म$$

फिर मान लो कि $फ_१$ (य) और $फ'_१$ (य) का महत्तमापवर्त्तन $फ_२$ (य) है

$$\text{तो}\quad फ_२ (य) = य_३\ या^२_४ \cdots\cdots\cdots या^{म-२}_म$$

इसी प्रकार $फ_२$ (य) और $फ'_२$ (य) इत्यादि के महत्तमापवर्त्तन मानते जाओ

$$\text{तो}\quad फ_३ (य) = या_४\ या^२_५ \cdots\cdots\cdots या^{म-३}_म$$

$$फ_४ (य) = या_५ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots या^{म-४}_म$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$फ_{म-१}(य) = या_म$$

$$फ_म \; (य) = १$$

$फ(य), फ_१ (य), फ_२ (य), \cdots\cdots फ_म (य)$ में पूर्व पूर्व में पर पर का भाग देने से

$$\frac{फ(य)}{फ_१(य)} = या_१ \, या_२ \cdots\cdots या_म = फा_१ (य)$$

$$\frac{फ_१(य)}{फ_२(य)} = या_२ \, या_३ \cdots\cdots या_म = फा_२ (य)$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{फ_{म-१}(य)}{फ_म (य)} = या_म \qquad = फा_म (य)$$

अब इन पर से

$$\frac{फा_१ (य)}{फा_२ (य)} = या_१, \frac{फा_२ (य)}{फा_३ (य)} = या_२, \cdots\cdots, \frac{फा_{म-१}(य)}{फा_म (य)} = या_{म-१}$$

और $फा_म (य) = या_म$ ।

अब $या_१ = ०$, $या_२ = ०$, ..., $या_म = ०$ इन समीकरणों से $फ(य) = ०$ इसके सब मूलों का पता लग जायगा जो कि एक बार, दो बार इत्यादि आए हैं।

साधारण रीति से स्पष्ट है कि $या_त = ०$ इसका कोई एक मूल $फ(य) = ०$ इसके उस मूल के तुल्य है जो $फ(य) = ०$ इसमें त बार आए हैं।

इसकी व्याप्ति दिखलाने के लिये एक उदाहरण दिखलाते हैं:—

मान लो कि

$$फ(य) = य^९ - ४य^८ + २य^७ + ४य^६ + ६य^५ - ६य^४ - १३य^३ - २य^२ + ४य + ८$$

तो बीजगणित की रीति से फ(य) और फ′(य) का महत्तमापवर्त्तन

$$फ_१(य) = य^४ - ३य^३ + य^२ + ४$$

$फ_१(य)$ और $फ'_१(य)$ का महत्तमापवर्त्तन

$$फ_२(य) = य - २$$

और $फ_२(य)$ और $फ'_२(य)$ का महत्तमापवर्त्तन

$$फ_३(य) = १$$

इन पर से

$$\frac{फ(य)}{फ_१(य)} = य^५ - य^४ - २य^३ - य^२ + य + २ = फा_१(य)$$

$$\frac{फ_१(य)}{फ_२(य)} = य^३ - य^२ - य - २ \qquad = फा_२(य)$$

और $$\frac{फ_२(य)}{फ_३(य)} = य - २ \qquad = फा_३(य)$$

इन पर से

$$\frac{फा_१(य)}{फा_२(य)} = या_१ = य^२ - १$$

$$\frac{फा_२(य)}{फा_३(य)} = या_२ = य^२ + य + १$$

$$फा_३(य) = या_३ = य - २$$

इसलिये $फ(य) = (य^२ - १)(य^२ + य + १)^२ (य - २)^३$

और फ(य)=० इसके मूल १, −१, $\frac{-१+\sqrt{-३}}{२}$, $\frac{-१+\sqrt{-३}}{२}$, $\frac{-१-\sqrt{-३}}{२}$, $\frac{-१-\sqrt{-३}}{२}$, २, २, २ हुए।

इस प्रकार के स्मरणार्थ श्लोक

फलतश्चादि फलोत्थं महत्तमावर्त्तनं तदन्यफलम् ।
एवं ततस्तदन्यं साध्यं यावद्भवेद्रूथम् ॥ १ ॥

फलानि पङ्क्त्यां विनिवेश्य पूर्वं तत्तत्पराप्तं कलिका भवन्ति ।
पूर्वा पराप्ता कलिका भवन्ति पुष्पाणि भृङ्ग्यादिसमाह्वयानि ॥ २ ॥

येषां स्वसंख्यासमघातकानां हतिर्भवेत् स्वीयफलस्य मानम् ।
प्रकल्प्य तच्छून्यसमं विपश्चित्तुल्यानि मूलानि विचारयेद्धि ॥ ३ ॥

दोहा

फल अरु फल को प्रथम फल ता त्रिच होय महान ।
जो अपवर्त्तन अन्य फल सोई होत सुजान ॥ १ ॥

यों लावहु बहु ऊपर फल जब तक होय न एक ।
एक तुल्य एक पंक्ति में राखहु सब सुविवेक ॥ २ ॥

पर से भागहु पूर्व को कलिका ताको नाम ।
पर कलिका हत पूर्व सो पुष्प होत शुभ काम ॥ ३ ॥

पहिलो दूजो तीसरो येहि क्रम से तेहि जान ।
अपनी संख्या के सदृश तिन को घात सुजान ॥ ४ ॥

ताके बध सम जानिए अपनो फल है मीत ।
ताहि शून्य सम मानि सम मूल जानिए चीत ॥ ५ ॥

अभ्यास के लिये प्रश्न ।

(१) जब फ (य) और फ′ (य) का कोई महत्तमापवर्त्तन अव्यक्तात्मक हो तो दिखलाओ कि फ (य)=० इसके एकाध तुल्य मूल अवश्य होँगे ।

(२) यदि फ (य)=० इसके मूल $अ_१, अ_२, \cdots\cdots अ_न$ होँ तो सिद्ध करो

$$फ'(य) = फ(य)\left(\frac{१}{य - अ_१} + \frac{१}{य - अ_२} + \cdots\cdots + \frac{१}{य - अ_न}\right)$$

(३) $य^न - क\,य^२ + ख = ०$ इसमेँ दिखलाओ कि क और ख मेँ क्या सम्बन्ध होगा यदि मूल तुल्य होँ ।

(४) $य^३ - प_२य + प_३ = ०$ इसके तीन तुल्य मूल नहीँ आ सकते यह सिद्ध करो ।

(५) $य^४ + प_२य^२ + प_४ = ०$ इसके तीन तुल्य मूल नहीँ आ सकते यह सिद्ध करो ।

(६) $य^न + प_१य^{न-१} + प_२य^{न-२} + \cdots\cdots + प_{न-१}य + प_न = ०$ इसके दो मूल $अ_१$ के तुल्य होँ तो सिद्ध करो कि

$$प_१य^{न-१} + २प_२य^{न-२} + ३प_३य^{न-३} + \cdots\cdots\cdots + न\,प_न = ०$$

इसका भी एक मूल $अ_१$ के तुल्य होगा ।

(७) $य^५ + प_२य^३ + प_३य^२ + प_५ = ०$ इसके दो मूल यदि समान हैँ तो सिद्ध करो कि वह मूल अवश्य

$$य^२ - \frac{२प_२^२}{५प_३} + \frac{५प_५}{३प_३} - \frac{४प_२}{१५} = ०$$ इसके एक मूल के तुल्य होगा ।

(८) यदि नीचे लिखे हुए समीकरणों के मूल तुल्य हों तो उनको निकालो ।

(१) $य^{३} - य - \frac{२}{३\sqrt{३}} = ०$ ।

(२) $य^{३} - य + \frac{२}{३\sqrt{३}} = ०$ ।

(३) $य^{३} - य^{२} - ८य + १२ = ०$ ।

(४) $य^{३} + ८य^{२} + २०य + १६ = ०$ ।

(५) $य^{३} - ५य^{२} - ८य + ४८ = ०$ ।

(६) $य^{३} - ३य^{२} - ९य + २७ = ०$ ।

(७) $य^{४} - ११य^{२} + १८य - ८ = ०$ ।

(८) $य^{४} - ७य^{३} + १३य^{२} + ३य - १८ = ०$ ।

(९) $य^{४} - \frac{१}{२}य + \frac{३}{६४} = ०$ ।

(१०) $य^{५} - १३य^{४} + ६७य^{३} - १७१य^{२} + २१६य - १०८ = ०$ ।

(११) $२य^{४} - १२य^{३} + १९य^{२} - ६य + ९ = ०$ ।

(१२) $य^{५} - य^{४} - २य^{३} + २य^{२} + य - १ = ०$ ।

(१३) $य^{६} - ३य^{५} + ६य^{३} - ३य^{२} - ३य + २ = ०$ ।

(१४) $य^{७} - २य^{६} - ६य^{५} + ८य^{४} + १७य^{३} - ६य^{२} - २०य - ८ = ०$ ।

(१५) $य^{८} - ३य^{७} - ४य^{६} + १४य^{५} + ९य^{४} - २३य^{३} - १४य^{२} + १२य + ८ = ०$ ।

६—समीकरण के मूलों की सीमा

५७—चतुर्घात के ऊपरवाले समीकरणों के मूलो का जानने के लिये बीजगणित से कोई साधारण रीति नहीं पाई जाती। ऐसी स्थिति में समीकरण के मूल अटकल से निकाले जाते हैं। अर्थात् पहिले अव्यक्त का कोई एक मान कल्पना करते हैं, फिर उसका उत्थापन देने से यदि फ (य) शून्य के तुल्य हुआ तो कहेंगे कि अटकल से माना गया अव्यक्त का मान फ (य) = ० इसमें ठीक है। यदि उस कल्पित मान का उत्थापन देने से फ (य) शून्य के तुल्य नहीं हुआ तो कहेंगे कि यह अव्यक्त का मान नहीं है। फिर अव्यक्त का दूसरा मान मान कर फ (य) में उत्थापन देना होगा यों बार बार कर्म करने से अव्यक्त के जिस कल्पित मान का उत्थापन देने से जब फ (य) शून्य के तुल्य होगा तब कहेंगे कि फ (य)=० इसमें वह अव्यक्त का मान है।

ऊपर की क्रिया करने में यदि यह मालूम हो जाय कि अव्यक्त का मान कोई ज्ञात संख्या अ से बड़ा वा ब से अल्प नहीं है तो अव्यक्त के मान जानने के लिये जो असकृत्कर्म कहा है उसमें अटकल से अव्यक्त का मान जो अ से अल्प वा ब से अधिक मान कर कर्म करेंगे तो उसमें कम परिश्रम पड़ेगा क्योंकि पहिले अव्यक्त के मान अ से अधिक वा ब से अल्प मानने में जो व्यर्थ परिश्रम पड़ता था और समय भी नष्ट होता था उनका अब बचाव होगा। इसलिये इस अध्याय में समीकरण के मूल किन दो संख्याओं के भीतर होंगे इसका विचार किया जायगा। इस अध्याय में मूल शब्द से सर्वत्र संभाव्य मूल समझना चाहिए।

सीमा—सीमा से ऐसा समझना चाहिए जैसे कल्पना करो कि अ– स्थान से कोई मनुष्य ब– स्थान के लिये रवाना हुआ। वहाँ पहुँचने पर देखा कि अँगुलियों में अंगूठिआँ नहीं हैं, कहीं राह में गिर पड़ीं। अंगूठिआँ जहाँ जहाँ गिरी होंगी वे स्थान अवश्य अ और ब के अन्तर्गत हैं। इसलिये अ और ब को उन स्थानों की सीमा कहेंगे। इसी प्रकार जिन दो संख्याओं के भीतर समीकरण के सभी मूल आ जायँ उन संख्याओं को उन मूलों की सीमा कहते हैं। यदि कहा जाय कि अमुक संख्या समीकरण के धनात्मक मूलों की प्रधान सीमा है तो इससे यह समझना चाहिए कि समीकरण का कोई भी धनात्मक मूल उस संख्या से अधिक नहीं हो सकता।

५८—सब से बड़े संख्यात्मक ऋण गुणक में एक जोड़ देने से साधारण स्वरूपवाले समीकरण के धनात्मक मूलों की प्रधान सीमा होती है।

यहाँ साधारण स्वरूप वा रूपवाले समीकरणों से उन समीकरणों को समझना चाहिए जिनमें $य^न$ इसका गुणक एक एक हो।

मानलो कि $फ(य) = ०$ यह न घात का एक साधारण रूपवाला समीकरण है जिसमें सब से बड़ा ऋणात्मक गुणक प है तो समीकरण के आदि पद को छोड़ सब में ऋणात्मक गुणक प कर देने से

$$फ(य) > य^न - प(य^{न-१} + य^{न-२} + \cdots + य + १)$$

वा $\text{फ}(\text{य}) > \text{य}^{\text{न}} - \text{प}\dfrac{\text{य}^{\text{न}} - १}{\text{य} - १}$

इसलिये यदि य > १ तो

$$\text{य}^{\text{न}} - १ - \text{प}\frac{\text{य}^{\text{न}} - १}{\text{य} - १}$$ इससे फ (य) बहुत बड़ा होगा।

यदि $\text{य}^{\text{न}} - १ - \text{प}\dfrac{\text{य}^{\text{न}} - १}{\text{य} - १}$ यह वा $(\text{य}^{\text{न}} - १)\left(१ - \dfrac{\text{प}}{\text{य} - १}\right)$ यह धन होगा तो फ (य) भी धन होगा। परन्तु जब य > १ तब एक खण्ड $\text{य}^{\text{न}} - १$ यह सर्वदा धन ही रहेगा।

इसलिये यदि $१ - \dfrac{\text{प}}{\text{य} - १}$ यह धन होगा तो फ (य) सर्वदा धन होगा परन्तु य − १ > प वा य > प + १ होता है तो $१ \;\; \dfrac{\text{प}}{\text{य} - १}$ यह सर्वदा धन होता है।

इसलिये जब य $\geqq$ प + १ तो फ (य) सर्वदा धन रहेगा। यहाँ कहेंगे कि धनात्मक मूल प + १ इस से छोटे हैं। इसलिये समीकरण के धन मूलों की प्रधान सीमा प + १ सिद्ध होती है।

जैसे $\text{फ}(\text{य}) = \text{य}^५ - २\text{य}^४ + ३\text{य}^३ - ४\text{य}^२ - ५\text{य} - ६ = ०$ ऐसा कल्पना किया जाय तो इसमें सबसे बड़ा ऋण गुणक ६ है इसलिये धनात्मक मूलों की प्रधान सीमा ६ + १ = ७ हुई।

५६—यदि फ (य)=० इसमें य = −र तो स्पष्ट है कि पूर्व युक्ति से र के धन मानों की जो प्रधान सीमा होगी वही य के ऋण मानों की प्रधान सीमा होगी। परन्तु फ (य)=०

यह यदि कोई विषम न घात का समीकरण हो तो $(-र)^{न} = -र^{न}$। इसलिये फ $(-र) = ०$ इसके सब पदों को शून्य के पक्ष में ले जाकर तब ऊपर की युक्ति से सीमा का विचार करना चाहिए।

जैसे गत प्रक्रम के समीकरण में यदि $य = -र$ माना जाय तो उसका स्वरूप

$$-र^{५} + २र^{४} - ३र^{३} - ४र^{२} + ५र - ६ = ० \text{ ऐसा हुआ।}$$

दूसरे पक्ष में ले जाने से

$$र^{५} + २र^{४} + ३र^{३} + ४र^{२} - ५र + ६ = ० \text{ ऐसा हुआ।}$$

इसमें सबसे बड़ा ऋणात्मक गुणक ५ इसलिये र के धन मानों की वा य के ऋण मानों की प्रधान सीमा $-(५+१) = -६$ हुई। इसलिये फ $(य) = ०$ इस समीकरण के सभी मूल -६ और ७ इन्हीं दो संख्याओं के भीतर हैं।

यदि फ $(य) = ०$ इस समीकरण में सब से बड़ा गुणक म हो तो स्पष्ट है कि चिन्ह विचार के बिना पूर्व युक्ति से कह सकते हो कि फ $(य) = ०$ इसके सब मूल $-(म+१)$ और $म+१$ इनके भीतर हैं।

६०—न घात के साधारण स्वरूप वाले समीकरण में यदि सब से बड़ा ऋणात्मक गुणक प हो और ऋणात्मक गुणक वाले पद में अव्यक्त का सबसे बड़ा घात न—त हो तो धनात्मक मूलों की प्रधान सीमा $१ + \sqrt[त]{प}$ होती है।

फ (य)=० इस न घात के समीकरण का यदि ऐसा रूप हो कि आदि पद से लेकर त − १ पद तक के गुणक धन होँ और अवशिष्ट पदोँ मेँ सब से बड़ा ऋणात्मक गुणक प हो तो स्पष्ट है कि फ (य) यह $य^{न} - प\,(य^{न-१} + य^{न-२} + \cdots + य + १)$ इससे बड़ा होगा अर्थात् $य^{न} - प\,\frac{य^{न-त+१} - १}{य - १}$ इससे बड़ा होगा और

$\frac{(य-१)^{न}\,(य-१) - प\,(य^{न-त+१} - १)}{य - १}$ इससे बहुत बड़ा होगा।

यदि य > १ तो फ (य) यह $\frac{(य-१)^{न}\,(य-१) - प\cdot य^{न-त+१}}{य - १}$ इससे और भी बहुत बड़ा होगा। इसलिये यदि

$\frac{(य-१)^{न+१} - प\cdot य^{न-त+१}}{य - १}$ यह वा $\frac{य^{न-त+१}}{य - १}\left\{(य-१)^{त} - प\right\}$ यह

अथवा $(य-१)^{त} - प$ यह धन होगा तो फ (य) भी धन होगा। परन्तु यदि $(य-१)^{त} = प$ अथवा $य = १ + प^{\frac{१}{त}}$ तो $(य-१)^{त} - प$ यह धन होता है। इसलिये य, $१ + \sqrt[त]{प}$ इसके तुल्य वा अधिक होगा तो फ (य) भी धन होगा। इसलिये फ (य) = ० इसके धनात्मक मूलोँ की प्रधान सीमा $१ + \sqrt[त]{प}$ यह हुई।

जैसे यदि फ (य) = $य^{५} + २य^{४} + य^{३} - ४य^{२} - १५य + ८ = ०$ तो यहाँ तीन पद तक धन गुणक हैँ और आगे के पदोँ मेँ सब

से बड़ा ऋण गुणक १५ है इसलिये त = ४, प = १५ इनका $१ + प^{\frac{१}{त}}$ इसमेँ उत्थापन देने से प्रधान सीमा $१ + (१५)^{\frac{१}{४}} = ३$ (स्वल्पान्तर से)।

सीमा जानने के लिये यदि निरवयव त घात मूल न मिले तो प में कोई सब से छोटी संख्या मिला कर तब त घात मूल लो जिसमें प्रधान सीमा इस आए हुए सीमा के मान के अन्तर्गत हो।

इस पर से यह प्रकार उत्पन्न होता है:—अवशिष्ट पदोँ मेँ सब से बड़ा जो ऋणात्मक गुणक हो उसके संख्यात्मक मान का आदि से ले जितने पद तक धन गुणक हैँ उसके संख्या तुल्य घात मूल लेकर उसमेँ एक जोड़ दो तो धन मूलोँ की सीमा होगी।

९१—यदि किसी समीकरण में प्रत्येक ऋणात्मक गुणक को धनात्मक मान कर उसमें उसके पूर्व आए हुए धनात्मक गुणकोँ के योग से भाग दिया जाय तो इस प्रकार उपलब्ध सब से बड़ी लब्धि में एक जोड़ देने से धन मूलोँ की प्रधान सीमा होती है।

बीजगणित से सिद्ध है कि $य^म$

$$= (य - १)(य^{म-१} + य^{म-२} + \cdots\cdots + य + १) + १$$

इसलिये यदि समीकरण का ऐसा रूप हो जिसके बहुत पदोँ के गुणक धन और बहुतोँ के ऋण होँ अर्थात्

$फ(य) = प_० य^न + प_१ य^{न-१} + प_२ य^{न-२} - प_३ य^{न-३} + प_४ य^{न-४} + \cdots\cdots - प_त य^{न-त} + \cdots\cdots + य_न = ०$ ऐसा हो तो इसमें य के जिन जिन घातों का गुणक धन है उनका रूप ऊपर के समीकरण में पक्ष बदलने से और जिनके गुणक ऋण हैं उनको ज्यों का त्यों रखने से

$$\begin{aligned} फ(य) = &प_० (य-१) य^{न-१} + प_० (य-१) य^{न-२} \\ &+ प_० (य-१) य^{न-३} + \cdots\cdots + प_० (य-१) + प_० \\ &+ प_१ (य-१) य^{न-२} + प_१ (य-१) य^{न-३} + \cdots\cdots \\ &+ प_१ (य-१) + प_१ \\ &+ प_२ (य-१) य^{न-३} + \cdots\cdots + प_२ (य-१) + प_२ \\ &- प_३ (य-१) य^{न-३} \cdots\cdots \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

इस रूपान्तर में यदि य एक से अधिक हो तो प्रत्येक ऊर्ध्वाधर पंक्ति य के धन मान में धन ही रहेगी, जहाँ कोई ऋण संख्या है वहाँ वह भी पंक्ति धन ही रहेगी यदि $(प_० + प_१ + प_२) > प_३$

इसी प्रकार $(प_० + प_१ + प_२ + \cdots\cdots प_{त-१})(य-१) > प_त$

इसलिये $य > \frac{प_३}{प_० + प_१ + प_२} + १$

साधारण से $य > \frac{प_न}{प_० + प_१ + प_२ + \cdots प_{त-१}} + १$

इससे सिद्ध होता है कि ऋणात्मक पद की संख्या में उसके पहले पदों में जितने धनात्मक गुणक हैं उनकी संख्या

के योग का भाग दो यदि लब्धि पूरी न आवे तो शेष को छोड़ एकाधिक लब्धि लो और उसमेँ एक जोड़कर उसे खण्ड मानोँ। इस प्रकार से जितने ऋणात्मक गुणक होँ सब पर से खण्डोँ का साधन करो। सब खण्डोँ मेँ जो सबसे बड़ा हो उसे समीकरण के धनात्मक मूलोँ की प्रधान सीमा समझो।

जैसे यदि $\text{फ}(\text{य}) = \text{य}^{५} + ९\,\text{य}^{४} - १५\,\text{य}^{३} - ५२\text{य}^{२}$
$$+ ५५\text{य} - १७ = ०$$

ऊपर की युक्ति से खण्ड

$$= \frac{१५}{९+१} + १,\ \frac{५२}{९+१} + १,\ \frac{१७}{९+१+५५} + १$$

$$= \quad ३ \quad ;\quad ७ \quad ,\quad १$$

इनमेँ सब से बड़ा खण्ड ७ है इसलिये धनात्यक मूलोँ की सीमा ७ हुई। इसी उदाहरण मेँ ५६वेँ प्रक्रम से ५२ और ५८वेँ प्रक्रम से $१ + \sqrt{५२} = ९$ प्रधान सीमा आती हैँ। इन दोनोँ से ७ यह कम है इसलिये उन दोनोँ प्रकारोँ से यह प्रकार यहाँ पर कर्म लाघव उत्पन्न करता है।

प्रथम ऋणात्मक गुणक के पहले जहाँ कई एक धनात्मक गुणक होँ और धनात्मक गुणकोँ की संख्या जहाँ भारी भारी हो वहाँ पर इस प्रकार से प्रधान सीमा की संख्या छोटी आवेगी जिस पर से गणित करने मेँ कर्म लाघव होगा।

६२—कभी कभी कुछ हेर फेर से समीकरणोँ का रूपान्तर करने से बहुत छोटी सीमा का पता लग जाता है।

जैसे पिछले प्रक्रम के उदाहरण मेँ

$$\text{फ}(\text{य}) = \text{य}^{५} + ९\text{य}^{४} - १५\text{य}^{३} - ५२\text{य}^{२} + ५५\text{य} - १७ = ०$$

$$\text{वा } \text{य}^{२}(\text{य}^{३} - ५२) + ९\text{य}^{३}\left(\text{य} - \frac{१५}{९}\right) + ५५\left(\text{य} - \frac{१७}{५५}\right) = ०$$

इसमें स्पष्ट है कि यदि य = ४ तो फ (य) धन होता है। इसलिये धन मूलों की प्रधान सीमा ४ हुई जो पिछली सब प्रधान सीमाओं से छोटी है।

दूसरा उदाहरणः—

मानो कि $\text{फ}(\text{य}) = \text{य}^{५} - ५\text{य}^{४} - १३\text{य}^{३} + २\text{य}^{२} + \text{य} - ७० = ०$

इसमें ५६वें और ५८वें प्रक्रम से धन मूलों की प्रधान सीमा ७० + १ = ७१, ५९वें प्रक्रम से $\frac{७०}{४} + १$ अर्थात् १६ सीमा आती है। परन्तु इसी का यदि $\text{य}^{३}(\text{य}^{२} - ५\text{य} - १३) + २\text{य}^{२} + \text{य} - ७०$ ऐसा रूपान्तर कर डालो और पहले ५६वें प्रक्रम से $\text{य}^{२} - ५\text{य} - १३$ इसमें सीमा का विचार करो तो १३ + १ = १४ यह हुआ। इस मान में $\text{य}^{३}(\text{य}^{२} - ५\text{य} - १३)$ यह तो धन होता ही है किन्तु $२\text{य}^{२} + \text{य} - ७०$ यह भी उसी १४ के मान का उत्थापन देने से धन होता है। इसलिये धन मूलों की प्रधान सीमा १४ हुई जो १६ से भी छोटी है।

६३—कल्पना करो कि $\text{फ}(\text{य}) = \text{प}_{०}\text{य}^{\text{न}} + \text{प}_{१}\text{य}^{\text{न}-१} + \text{प}_{२}\text{य}^{\text{न}-२} + \cdots\cdots + \text{प}_{\text{न}-१}\text{य} + \text{प}_{\text{न}} = ०$ तो स्पष्ट है कि इसमें न + १ पद होंगे।

न + १ में ३ का भाग देने से शेष १ वा २ बचेगा। इसलिये फ (य) में तीन तीन पदों को लेने से यदि शेष न बचे तो

$$\begin{aligned}\text{फ}(\text{य}) = {} & \text{य}^{\text{न}-२}(\text{प}_{०}\text{य}^{२} + \text{प}_{१}\text{य} + \text{प}_{२}) \\ & + \text{य}^{\text{न}-५}(\text{प}_{३}\text{य}^{२} + \text{प}_{४}\text{य} + \text{प}_{५}) + \cdots\cdots\cdots \\ & + (\text{प}_{\text{न}-२}\text{य}^{२} + \text{प}_{\text{न}-१}\text{य} + \text{य}_{\text{न}}) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (१)\end{aligned}$$

शेष एक बचे तो

$$\text{फ}(\text{य}) = \text{य}^{\text{न}-२}\ (\text{प}_{०}\text{य}^{२} + \text{प}_{१}\text{य} + \text{प}_{२}\ )$$
$$+ \text{य}^{\text{न}-५}\ (\text{प}_{३}\text{य}^{२} + \text{प}_{४}\text{य} + \text{प}_{५}\ ) + \cdots\cdots\cdots$$
$$+ \text{य}(\text{प}_{\text{न}-३}\text{य}^{२} + \text{प}_{\text{न}-२}\text{य} + \text{प}_{\text{न}-१}) + \text{प}_{\text{न}} \cdots\cdots (२)$$

और यदि शेष दो बचे तो

$$\text{फ}(\text{य}) = \text{य}^{\text{न}-२}\ (\text{प}_{०}\text{य}^{२} + \text{प}_{१}\text{य} + \text{प}_{२}\ )$$
$$+ \text{य}^{\text{न}-५}\ (\text{प}_{३}\text{य}^{२} + \text{प}_{४}\text{य} + \text{प}^{५}\ ) + \cdots\cdots\cdots$$
$$+ \text{य}^{२}(\text{प}_{\text{न}-४}\text{य}^{२} + \text{प}_{\text{न}-३}\text{य} + \text{प}_{\text{न}-२})$$
$$+ (\text{प}_{\text{न}-१}\text{य} + \text{प}_{\text{न}}) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (३)$$

तीनों स्थितिओं में कोष्ठकान्तर्गत जितने वर्गात्मक अव्यक्त के फल हैं उन सब को पृथक् पृथक् शून्य के समान कर य के मान ले आवो। इन मानों में जो सब से बड़ा होगा स्पष्ट है कि वही (१) में धनमूल की सीमा होगी।

यदि $\text{प}_{\text{न}}$ धनात्मक हो तो (२) में भी वही सीमा होगी, यदि $\text{प}_{\text{न}}$ ऋणात्मक और य के उस बड़े मान से अल्प हो तो भी वही सीमा होगी और यदि ऋणात्मक $\text{प}_{\text{न}}$ उस बड़े मान से बड़ा हो तो $\text{प}_{\text{न}}$ का संख्यात्मक मान जो होगा वही सीमा होगी।

(३) स्थिति में उस बड़े मान का उत्थापन ($\text{प}_{\text{न}-१}\text{य} + \text{प}_{\text{न}}$) इसमें देने से इसका मान यदि धन आवे तो उसी बड़े मान के समान सीमा होगी, यदि ऋण आवे तो उससे बड़े जिस मान के उत्थापन देने से ($\text{प}_{\text{न}-१}\text{य} + \text{प}_{\text{न}}$) यह धन हो वही सीमा होगी।

प्रत्येक वर्गसमीकरण मेँ य के मान निकालने मेँ यदि निरवयव मूल न मिले तो जिसका मूल लेना हो उसे कुछ अधिक कर निरवयव मूल लेकर य का मान निकालो। यदि य का मान भिन्न आवे तो उसमेँ भी कुछ अधिक कर निरवयव कर लो। य के द्विविध मान मेँ जो ऋणात्मक मान हो उसे छोड़ दो।

जैसे ६०वेँ प्रक्रम के दूसरे उदाहरण मेँ

$$य^{५} - ५य^{४} - १३य^{३} + २य^{२} + य - ७०$$
$$= य^{३}(य^{२} - ५य - १३) + (२य^{२} + य - ७०)$$

इसमेँ पहले $य^{२} - ५य - १३ = ०$ इस पर से य का धन मान $= \frac{५ + \sqrt{७७}}{२} = ७$ (कुछ अधिक)

फिर $२य^{२} + य - ७० = ०$ इस पर से य का धन मान $= \frac{१}{४} + \sqrt{\frac{१}{१६} + ३५} = ७$ (कुछ अधिक)

यहाँ दोनोँ समान ही स्वल्पान्तर से य के धन मान हुए। इसलिये धन मूल की सीमा ७ हुई जो सब से छोटी है।

जिस वर्गसमीकरण से असम्भव मान आवे उसे छोड़ दो क्योँकि उसमेँ य के किसी धन मान मेँ फल धन ही होगा।

$प_{०}, प_{१}, प_{२},$ इत्यादि मेँ कोई त्रिक ऋणात्मक होँगे तब ऊपर की युक्ति से काम नहीँ चलेगा परन्तु वहाँ भी एक पद के ऐसे खण्ड करो जिसमेँ कोष्ठ के भीतर के आदि पद मेँ धन गुणक होँ फिर तारतम्य से ऊपर की युक्ति से ऐसा दूसरा

समीकरण का रूपान्तर बना सकते हो जिससे यह पता लग जायगा कि य के किस छोटे धन मान में फ (य) का मान धन होगा।

६५—ऊपर के प्रक्रमों में प्रधान सीमा के जानने के लिये कई एक युक्तियाँ दिखलाई जा चुकी हैं अब इस प्रक्रम में कनिष्ठ सीमा जानने की विधि लिखते हैं।

कनिष्ठ सीमा—जिस संख्या से समीकरण का कोई भी धनात्मक मूल छोटा न हो उस संख्या को समीकरण के धनात्मक मूलों की कनिष्ठ सीमा कहते हैं।

मान लो कि समीकरण का छोटा रूप बना लिया है। छोटे रूप से सर्वत्र ऐसा समझना कि सब से बड़े घात वाले अव्यक्त के गुणक से दोनों पक्षों में अपवर्त्तन देकर उसका गुणक एक के तुल्य कर लिया है और उसका रूप

$$\text{फ}(\text{य}) = \text{य}^{\text{न}} + \text{प}_{१}\text{य}^{\text{न}-१} + \text{प}_{२}\text{य}^{\text{न}-२} + \cdots\cdots + \text{प}_{\text{न}-१}\text{य}$$

$+ \text{प}_{\text{न}} = ०$ ऐसा है। इसमें $\text{य} = \frac{१}{\text{र}}$ ऐसा कल्पना कर एक नया समीकरण का रूप जिसमें सब पदों को $\text{र}^{\text{न}}$ इससे गुण और $\text{प}_{\text{न}}$ इसका भाग दे देने से

$$\text{र}^{\text{न}} + \frac{\text{प}_{\text{न}-१}}{\text{प}_{\text{न}}}\text{र}^{\text{न}-१} + \cdots\cdots + \frac{\text{प}_{२}}{\text{प}_{\text{न}}}\text{र}^{२} + \frac{\text{प}_{१}}{\text{प}_{\text{न}}}\text{र} + \frac{१}{\text{प}_{\text{न}}} = ०$$

ऐसा हुआ। इसमें मान लो कि पिछले प्रक्रमों की युक्तियों से र के धन मानों की प्रधान सीमा 'सी' हुई तो स्पष्ट है कि 'सि' से र बड़ा नहीं हो सकता इसलिये य, $\frac{१}{\text{सी}}$ से छोटा भी नहीं

हो सकता। इसलिये य के धन मानों की कनिष्ठ सीमा $\frac{१}{सी}$ यह हुई।

मान लो कि ५६वें प्रक्रम की युक्ति से इस समीकरण में प्रधान सीमा जानना है तो ऋण गुणकों में सब से बड़े गुणक को $\frac{प_त}{प_न}$ कहें तो इसकी प्रधान सीमा

$$= १ - \frac{प_त}{प_न} = \frac{प_न - प_त}{प_न} ।$$

इसलिये फ (य) = ० इसमें कनिष्ठ सीमा $= \frac{प_न}{प_न - प_त}$ यह हुई।

$\frac{प_त}{प_न}$ यह तभी ऋण हो सकता है जब $प_त$ से विरुद्ध चिन्ह का $प_न$ हो। इसलिये कनिष्ठ सीमा का संख्यात्मक हर सर्वदा $प_न$ अर्थात् अंश से बड़ा होगा इसलिये इस पर से यह सिद्ध होता है कि कनिष्ठ सीमा सर्वदा एक से कम होगी।

५६वें और ५८—५९वें प्रक्रमों में प्रधान सीमा जानने के लिये जो जो युक्तियाँ दिखलाई गई हैं सब में य को एक से बड़ा मान लिया गया है इसलिये इन पर से भी स्पष्ट ही है कि कनिष्ठ सीमा एक से सर्वदा छोटी रहेगी।

जैसे इस अध्याय में प्रधान सीमाओं को जानने के लिये सावयव संख्याओं में कुछ कुछ बढ़ा कर निरवयव कर लिया है उसी तरह इस कनिष्ठ सीमा में भी कुछ बढ़ा कर इसका मान सर्वदा एक के तुल्य कहना चाहिए तब इस कनिष्ठ सीमा

जानने के लिये नया प्रक्रम व्यर्थ है क्योंकि ५६, ५८—५९वें प्रक्रमों से पहले ही स्पष्ट है कि य का धन मान एक से अल्प नहीं होगा।

टाड्हण्टर (Todhunter) साहब ने अपने ग्रन्थ के ६३वें प्रक्रम में जो $\frac{१२}{२५}$ यह कनिष्ठ सीमा का मान लिखा है वह जहाँ जहाँ य का मान रूप से अधिक होगा व्यर्थ है क्योंकि वहाँ स्पष्ट है कि एक से अल्प य का धन मान होना असम्भव है। जैसे यदि

$$फ(य) = य^३ - ६य^२ + २६य - २४ = ०$$

इसमें ५६वें प्रक्रम से प्रधान सीमा २५ आई। फिर य के स्थान में $\frac{१}{र}$ इसका उत्थापन देने से और $र^३$ से गुण देने से और −२४ का भाग देने से

$$र^३ + \frac{२६}{-२४} र^२ - \frac{६}{-२४} र + \frac{१}{-२४} = ०$$

इसमें $प_न - = -२४$, और $प_त = २६$। इसलिये कनिष्ठ सीमा $= \frac{प_न}{प_न - प_त} = \frac{-२४}{-२४-२६} = \frac{१२}{२५}$ जो व्यर्थ है क्योंकि य का धनमान समीकरण से स्पष्ट है कि एक से अधिक होगा।

इसलिये $फ(य) = य^न + प_१य^{न-१} + प_२य^{न-२} + \cdots\cdots + प_न = ०$ इसमें य के स्थान में १ उत्थापन देकर समझ लो कि $१ + प_१ + प_२ + \cdots\cdots + प_न$ यह धन वा ऋण आता है यदि ऋण आवे तो व्यवहार के लिये कनिष्ठ सीमा को १ मान लो।

६५—**न्यूटन की रीति**—न्यूटन ने प्रधान सीमा जानने के लिये जो विधि लिखी है उसे नीचे लिखते हैं:—

मान लो कि $\text{फ}(\text{य}) = ०$ इसमें सीमा का ज्ञान करना है। य के स्थान में $\text{च} + \text{र}$ का उत्थापन देकर इसका स्वरूप ११वें प्रक्रम से

$$\text{फ}(\text{च}+\text{र}) = \text{फ}(\text{च}) + \text{र}\,\text{फ}'(\text{च}) + \frac{\text{र}^{२}}{२!}\text{फ}''(\text{च}) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{\text{र}^{\text{न}}}{\text{न}!}\text{फ}^{\text{न}}(\text{च}) = ०$$ ऐसा हुआ। इसमें यदि $\text{फ}(\text{च})$, $\text{फ}'(\text{च})$, $\text{फ}''(\text{च})$, ...$\text{फ}^{\text{न}}(\text{च})$ ये सब किसी धन च के मान में धन हों तो र के किसी धन मान में $\text{फ}(\text{च}+\text{र})$ यह धन ही होगा। इसलिये $\text{फ}(\text{च}+\text{र}) = ०$ ऐसा होना असम्भव होगा। इसलिये ऊपर का समीकरण ठीक तभी होगा जब र का मान ऋण होगा। परन्तु $\text{य} = \text{र} + \text{च}$ $\therefore \text{र} = \text{य} - \text{च}$ परन्तु र ऋण है इसलिये य, च से बड़ा नहीं हो सकता क्योंकि ऐसा होने से र का मान धन होगा जो यहाँ पर न होना चाहिए। इसलिये ऐसी स्थिति में च को य के धन मानों की प्रधान सीमा कहेंगे।

जैसे ६०वें प्रक्रम के दूसरे उदाहरण में

$$\text{य}^{५} - ५\text{य}^{४} - १३\text{य}^{३} + २\text{य}^{२} + \text{य} - ७०$$

यहाँ $\text{फ}(\text{च}) = \text{च}^{५} - ५\text{च}^{४} - १३\text{च}^{३} + २\text{च}^{२} + \text{च} - ७०$

$\text{फ}'(\text{च}) = ५\text{च}^{४} - २०\text{च}^{३} - ३९\text{च}^{२} + ४\text{च} + १$

$\frac{१}{२}\text{फ}''(\text{च}) = १०\text{च}^{३} - ३०\text{च}^{२} - ३९\text{च} + २$

$\frac{१}{३!}\text{फ}'''(\text{च}) = १०\text{च}^{२} - २०\text{च} - १३$

$\frac{१}{४!}\text{फ}''''(\text{च}) = ५\text{च} - ५$

यहाँ सुभीते के लिये नीचे से विचार करना आरम्भ करो तो जब च = २ तो फ'''' (च) धन होता है। जब च = ३ तब फ''' (च) धन होता है। जब च = ४ तब फ'' (च) धन होता है। जब च = ६ तब फ' (च) धन होता है। और जब च = ७ तब फ (च) भी धन होता है। इसलिये च के धन ७ मान में फ (च), फ' (च)......फ'''' (च) सब धन हुए इसलिये य के धनमानों की प्रधान सीमा ७ हुई। यही ६२वें प्रक्रम से भी सिद्ध हुई है।

यहाँ जिस च के धन में फ (च) यह धन आ गया उस च के मान में फ' (च), फ'' (च) इत्यादि धन आते हैं कि नहीं इसकी परीक्षा करनी आवश्यकता नहीं, अब वे सब आप ही आप धन होंगे क्योंकि मानो कि च = अ तो नीचे से फ'' (च) तक धन होते हैं तो च को कुछ बढ़ा कर अ + क के तुल्य करने से

$$फ''(अ+क) = फ''(अ) + क\,फ'''(अ) + \frac{क^२}{२!}फ''''(अ) + \cdots$$

इसमें स्पष्ट है कि दहिने पक्ष में सब पद धन हैं; इसलिये फ'' (अ + क) यह भी धन हुआ। इसलिये जब नीचे से विचार करना आरम्भ किया गया है तब स्पष्ट है कि च के मान के बढ़ने से नीचे वाले आप ही धन होंगे। इसलिये यहाँ पर फिर परीक्षा करनी व्यर्थ है।

सर्वत्र जहाँ जहाँ अव्यक्त के ऋणमान की प्रधान सीमा जाननी हो तो ५७वें प्रक्रम से वहाँ वहाँ पर सहज में जान सकते हो।

जैसे $य^{५} - ७य^{४} - १५य^{३} + ३य^{२} + ४य + ४८ = ०$ इसमेँ ५७वेँ प्रक्रम की युक्ति से $य = -र$ करने से

$र^{५} + ७र^{४} - १५र^{३} - ३र^{२} + ४र + ४८ = ०$ इसमेँ धन मानोँ की प्रधान सीमा ५९वेँ प्रक्रम से $\frac{४८}{१ + ७ + ४} + १ = ५$ ।

अथवा $र^{५} - १५र^{३} + ४र + ७र^{४} - ३र^{२} - ४८$

$$= र^{३}(र^{२} - १५) + ४र + ७(र^{४} - \tfrac{३}{७}र^{२} - \tfrac{४८}{७})$$

$$= र^{३}(र^{२} - १५) + ४र + ७\left\{र^{२}(र^{२} - \tfrac{३}{७}) - \tfrac{४८}{७}\right\}$$

इससे स्पष्ट है कि जब $र = ४$ तो फ (र) धन होता है; इसलिये समीकरण के धन मूलोँ की प्रधान सीमा पहिले से छोटी ४ ही हुई ।

और फ (र) मेँ जब $र = ०$ तब फ $(र) = १ + ७ - १५ - ३ + ४ - ४८ = १२ - ६६ = -५४$ इसलिये धन मूलोँ की कनिष्ठ सीमा $+१$ होगी । इसलिये फ $(य) = ०$ इसके ऋण मूलोँ की सीमा -४ और -१ हुई ।

६६—प्रधान सीमा जानने मेँ बड़ी सावधानी चाहिए। समीकरण का साधारण रूप देख कर प्रधान सीमा जानने मेँ कभी कभी धोखा हो जाने की सम्भावना होती है ।

जैसे यदि फ $(य) = (य - ५)^{२}(य - २) = ०$ ऐसा हो तो इस रूप से तो स्पष्ट है कि य का धन मान ५ से अधिक नहीँ हो सकता तथा धोखे से २ से भी अधिक नहीँ कहा जा सकता । इसलिये धोखे से २ को भी प्रधान सीमा कह सकते

हो जो कि वस्तुतः कनिष्ठ सीमा है। यहाँ पर अपचित घात क्रम से गुणकर समीकरण का रूप बनाओ तो

$$फ (य) = (य - ५)^{२} (य - २) = (य^{२} - १०य + २५)(य - २)$$
$$= य^{३} - १२य^{२} + ४५य - ५० = ०$$

यहाँ ५६वें प्रक्रम से प्रधान सीमा ५१ और ५८वें प्रक्रम से भी ५१ आती है। यह तो बहुत भारी होने से ठीक ही है परन्तु ५९वें प्रक्रम से जो $\frac{५०}{१ + ४५} + १ = ३$ यह प्रधान सीमा जो आती है वह ठीक नहीं,

इसी प्रकार दूसरे (य – ५) (य – ४) (य – १) = ० इस उदाहरण में भी देखने से प्रधान सीमा ५ है और यह भी स्पष्ट है कि १ से अधिक य के सब धन मानों में फ (य) धन होगा इसलिये यदि १ को प्रधान सीमा कहोगे तो ठीक नहीं होगा।

इसी फ (य) को घात कर $य^{३} - १०य^{२} + २९य - २०$ ऐसा बनाओ तो ५६वें, ५८वें, प्रक्रम से प्रधान सीमा २१ यह ठीक आती है परन्तु ५९वें से जो $\frac{२०}{२०} + १ = २$ आती है यह ठीक नहीं।

यहाँ डेस्कार्टिस् की युक्ति से जानते हैं कि अव्यक्त के सब मान धन हैं इसलिये १० सब मानों का योग होगा। तब स्पष्ट है कि कोई धन मान १० से बड़ा न होगा इसलिये यहाँ १० को प्रधान सीमा कह सकते हैं। इसी प्रकार पहिले उदाहरण $य^{३} - १२य^{२} + ४५य - ५०$ इसमें प्रधान सीमा १२ होगी जो क्रम से २१ और ५१ दोनों से छोटी है। इस प्रकार से और उदाहरणों में भी समझना चाहिए।

६७—जब २५वें प्रक्रम के ५वें प्रसिद्धार्थ से स्पष्ट है कि फ (य) = $य^न + प_१ य^{न-१} + \cdots\cdots + य_न = ०$ इसमें $-प_१$ यह सब मूलों के योग के समान है और फ (−र) = ० में जो जो र के धन मान आवेंगे वे य के ऋणमान होंगे इसलिये यदि फ (य) = ० इसमें य के सब मान सम्भाव्य हों तो फ (−र) = ० इसके धन मूलों की जो प्रधान सीमा हो उसे धन मूलों की संख्या से गुण कर फ (य) के द्वितीय पद के विरुद्ध चिन्हात्मक गुणक में जोड़ देने से जो योग होगा वह फ (य) = ० इसमें य के सब धन मानों के योग से बड़ा होगा। इसलिये योग को प्रधान सीमा कह सकते हैं।

जैसे $य^३ - ७य + ३ = ०$ इसके सब मूल सम्भाव्य है (४७वाँ प्रक्रम देखो) इसलिये य के स्थान में −र का उत्थापन देने से $र^३ - ७र - ३ = ०$ ऐसा समीकरण बना जिसका रूपान्तर $र (र^२ - ७) - ३ = ०$ ऐसा कर सकते हो इससे स्पष्ट है कि यदि र = ३ तो फ (−र) यह सर्वदा धन होता है और यहाँ धन मान एक ही है इसलिये र के धन मान की प्रधान सीमा ३ बई। इसे एक से गुण कर फ (य) के $य^२$ के गुणक शून्य में जोड़ देने से फ (य) = ० इसके धन मूलों की प्रधान सीमा ३ हुई।

६८—यदि फ (य) में य के स्थान में क्रम से अ और क ऐसी दो संख्याओं का उत्थापन दिया जाय जिनके बीच फ (य) = ० इसके मूलों की संख्या विषम हो तो फ (अ) और फ (क) ये दोनें विरुद्ध

चिन्ह के होंगे। यदि उनके बीच समीकरण का कोई मूल न हो या मूलों की संख्या सम हो तो वे दोनों एक चिन्ह के होंगे।

फ (य) = ० इस समीकरण के सब सम्भाव्य मूल क्रम से $अ_1, अ_2, \cdots, अ_त$ मानों तो

$$फ (य) = (य - अ_1)(य - अ_2)(य - अ_3)\cdots(य - अ_त) फा (य)$$

ऐसा होगा।

जहाँ फा (य), सब असम्भाव्य मान सम्बन्धी अव्यक्त के एक घात खण्ड के घातके तुल्य है और जो य के किसी सम्भाव्य मान में सर्वदा धन ही रहता है क्योंकि किसी समीकरण में जोड़े जोड़े असम्भाव्य मान सम्बन्धी अव्यक के खण्ड रहेंगे जिनके मान क्रम से

$य - अ - क\sqrt{-१}$, $य - अ + क\sqrt{-१}$ ये होते हैं (२६वाँ प्रक्रम देखो) और जिनके घात $(य - अ)^२ + क^२$ ये सर्वदा य के सम्भाव्य मान में धन ही होते हैं।

कल्पना करो कि अ और क दो संख्या हैं जिनमें क से अधिक अ है और अ और क के बीच में फ (य) = ० इसके सम्भाव्य मूल $अ_1, अ_2, \ldots\ldots अ_त$ ये पड़े हैं।

अब य के स्थान में क्रम से अ और क का उत्थापन देने से

$$फ (अ) = (अ - अ_1)(अ - अ_2)\cdots\cdots(अ - अ_त) फा (अ)$$
$$फ (क) = (क - अ_1)(क - अ_2)\cdots\cdots(क - अ_त) फा (क)$$

यहाँ स्पष्ट है कि (अ $-$ अ$_1$) (अ $-$ अ$_2$)......(अ $-$ अ$_त$) ये सब खण्ड धन हैं और (क $-$ अ$_1$) (क $-$ अ$_2$)......(क $-$ अ$_त$) ये सब खण्ड ऋण हैं। और ऊपर की युक्ति से फा (अ) और फा (क) ये दोनों सर्वदा धन अर्थात् एक ही चिन्ह के हैं। इसलिये फ (अ) और फ (क) ये दोनों क्रम से तभी एक या विरुद्ध चिन्ह के होते हैं जब सम्भाव्य मूलों की अर्थात् अ$_1$, अ$_2$, अ$_3$,...अ$_त$ इनकी संख्या सम या विषम होती है।

६९—ऊपर की युक्ति की विलोम विधि से यह सिद्ध होता है कि यदि फ (य) में य के स्थान में उत्थापित जो दो संख्यायें विरुद्ध चिन्ह के फलों को उत्पन्न करती हैं तो उन संख्याओं के बीच फ (य)=० इसके मूलों की विषम संख्या पड़ी है और यदि वे संख्यायें एक चिन्ह के फलों को उत्पन्न करती हैं तो उनके बीच या तो समीकरण का कोई मूल नहीं है या मूलों की सम संख्या पड़ी है।

ऊपर अ को भी अ$_1$, अ$_2$,...अ$_त$ से छोटा मान लेने से वा क को अ$_1$, अ$_2$,...अ$_त$ से बड़ा मान लेने से यह स्पष्ट है कि फ (अ) और फ (क) यदि एक ही चिन्ह के हों तो सम्भव है कि अ और क के बीच फ (य) = ० इसका कोई मूल न पड़ा हो।

इस सिद्धान्त के अन्तर्गत १९वें प्रक्रम का सिद्धान्त है इसलिये इसके बल से उस में की बात सिद्ध हो जाती है।

७०—फ (य) = ० इसके पास पास के जो दो दो सम्भाव्य मूल होंगे उनके बीच में फ (य) = ० इसका एक एक सम्भाव्य मूल अवश्य होगा।

मान लो कि एक एक से न्यून $अ_1, अ_2, अ_3, \ldots\ldots अ_त$ सम्भाव्य मूल और असम्भाव्य एक घात के खण्ड फा (य) जो सर्वदा य के किसी सम्भाव्य मान में धन रहता है, फ (य) = ० इसमें हैं तो

$$फ(य) = (य - अ_1)(य - अ_2)(य - अ_3)\cdots\cdots(य - अ_त)$$

फा (य) और ५२वें प्रक्रम से

$$फ'(य) = \Big\{(य - अ_2)(य - अ_3)\cdots\cdots(य - अ_त)$$

$$+ (य - अ_1)(य - अ_3)\cdots\cdots(य - अ_त)\Big\} फा(य)$$

$$+ (य - अ_1)(य - अ_2)(य - अ_3)\cdots(य - अ_त) फा'(य)$$

इसमें य के स्थान में क्रम से $अ_1, अ_2, \ldots\ldots अ_त$ का उत्थापन देने से सब में $(य - अ_1)(य - अ_2)(य - _3)\cdots\cdots(य - अ_त)$ यह तो उड़ जायगा। इसलिये फ' ($अ_1$) उसी चिन्ह का होगा जिस चिन्ह का $(अ_1 - अ_2)(अ_1 - अ_3)\cdots\cdots(अ_1 - अ_त)$ है। इसी प्रकार $(अ_2 - अ_1)(अ_2 - अ_3)\cdots\cdots(अ_2 - अ_त)$ यह जिस चिन्ह का होगा उसी चिन्ह का फ' ($अ_2$) होगा।

$(अ_3 - अ_1)(अ_3 - अ_2)\cdots\cdots(अ_3 - अ_त)$ यह जिस चिन्ह का होगा उसी चिन्ह का फ' ($अ_3$) होगा। इसी प्रकार आगे भी करने से स्पष्ट है कि फ' ($अ_1$) धन होगा क्योंकि इसके

खण्डों में एक ऋण है। इस प्रकार पहिला धन, दूसरा ऋण तीसरा धन इत्यादि एकान्तर विरुद्ध चिन्ह के हैं। इसलिये ६७वें प्रक्रम से $अ_१, अ_२, अ_३ \cdots अ_त$ इत्यादि दो दो पास पास के मूलों के बीच $फ'(य) = ०$ इसके मूलों की विषम संख्या पड़ी होगी। इसलिये $अ_१, अ_२; अ_२, अ_३; अ_३, अ_४;$ इत्यादि दो दो पास पास के मूलों के बीच $फ'(य) = ०$ इसका एक संभाव्य मूल अवश्य होगा।

६९—यदि $फ(य) = ०$ इसके $अ_१$ मूल त वार, $अ_२$ मूल थ वार, $अ_३$ मूल द वार इत्यादि आवें और असंभाव्य मूल सम्बन्धी खण्डों के घात $फा(य)$ हो तो

$$फ(य) = (य - अ_१)^{त} (य - अ_२)^{थ} (य - अ_३)^{द} \cdots फा(य)$$

(यहां भी $अ_१, अ_२, अ_३ \cdots\cdots$ क्रम से एक एक से न्यून मानो।)

यहां भी ५६वें प्रक्रम से

$$फ'(य) = फा(य) \left\{ त(य - अ_१)^{त-१} (य - अ_२)^{थ} \cdots\cdots\cdots \right.$$

$$\left. + थ(य - अ_१)^{त} (य - अ_२)^{थ-१} (य - अ_३)^{द} \right\}$$

$$+ (य - अ_१)^{त} (य - अ_२)^{थ} (य - अ_३)^{द} \cdots\cdots फा'(य)$$

कल्पना करो कि $फ(य)$ और $फ'(य)$ का अव्यक्तात्मक महत्तमापवर्त्तन

$$(य - अ_१)^{त-१} (य - अ_२)^{थ-१} (य - अ_३)^{द-१} \cdots = फ_१(य)$$

$$\text{तो } \frac{\text{फ}'(\text{य})}{\text{फ}_1(\text{य})} = \text{फा}(\text{य}) \left\{ \text{त}(\text{य}-\text{अ}_2)(\text{य}-\text{अ}_3)\cdots\cdots + \text{थ}(\text{य}-\text{अ}_1)(\text{य}-\text{अ}_3)\cdots\cdots + \cdots\cdots \right\}$$

$$+ (\text{य}-\text{अ}_1)(\text{य}-\text{अ}_2)(\text{य}-\text{अ}_3)\cdots\cdots \text{फा}'(\text{य}) = \text{फि}(\text{य})$$

पिछले प्रक्रम की युक्ति से $\text{अ}_1, \text{अ}_2; \text{अ}_2, \text{अ}_3$ इत्यादि के बीच फि (य) = ० इसके मूलों की विषम संख्या पड़ी होगी और फ′ (य) = फ_1 (य) फि (य) इसमें अव्यक्त के जिस जिस मान में फि (य) शून्य के तुल्य होगा उस उस मान में फ′ (य) भी शून्य के तुल्य होगा; इसलिये यहां भी फ (य) = ० इसके दो दो पास पास के मूलों के बीच फ′ (य) = ० इसके एक एक मूल अवश्य होंगे, यह सिद्ध होता है।

७०—ऊपर की युक्ति की विपरीत क्रिया से यह भी सिद्ध होता है कि फ′ (य) = ० इसके दो दो पास पास के मूलों के बीच फ (य) = ० इसका एक ही मूल पड़ सकता है। अधिक मूल नहीं पड़ सकते क्योंकि कल्पना करो कि यदि फ′ (य) = ० इसके दो पास के जो अ_1, अ_2 मूल हैं उनके भीतर फ (य) = ० इसके दो मूल क_1 और क_2 पड़ते हैं तो अब ६८वें और ६९वें प्रक्रमों की युक्ति से कम से कम फ′ (य) = ० इसका एक मूल क_1 और क_2 के बीच में अ पड़ेगा इसलियें दो दो पास के मूल अ_1, अ, अ_2 ये हुए जो पूर्व कल्पित धर्म से विरुद्ध हैं इसलिये अ_1, अ_2 के बीच फ (य) = ० इसका एक ही मूल हो सकता है, अधिक नहीं हो सकता।

अनुमान—फ′ (य) = ० इसका सब से बड़ा जो मूल आवेगा उससे बड़ा फ (य) = ० इसका कोई एक ही मूल

होगा। क्योंकि यदि दो बड़े मूल हों तो ऊपर की युक्ति से इन दोनों के बीच फ′ (य) = ० इसका एक मूल होगा जो पहिले कल्पित सब से बड़े मूल से भी बड़ा होगा जो पूर्व कल्पना से असम्भव है।

इसी प्रकार फ′ (य) = ० इसका सब से छोटा जो मूल होगा उससे छोटा फ (य) = ० इसका एक ही कोई मूल हो सकता है।

७१—यदि फ (य) = ० इस न घात वाले समीकरण के सम्भाव्य मूल म हों तो ऊपर की युक्ति से फ′ (य) = ० इसके कम से कम म − १ संभाव्य मूल होंगे। फ″ (य) = ० इसके कम से कम म − २ संभाव्य मूल होंगे। इसी तरह फ^{त} (य) = ० इसके कम से कम म − त संभाव्य मूल होंगे। इसलिये फ^{त} (य) = ० इसके यदि आ असंभव मूल हों तो फ (य) = ० इसके भी कम से कम आ असम्भव मूल होंगे। यदि आ से भी कम असम्भव मूल मानो तो फ (य) = ० इसके न − आ इससे अधिक संभाव्य मूल होंगे और ऊपर की युक्ति से फ^{त} (य) = ० इसके न − त − आ इससे अधिक संभाव्य मूल होंगे। इसलिये सब मूल न − त − आ + आ = न − त इससे अधिक आवेंगे। परन्तु फ′ (य), फ″ (य) इत्यादि के आनयन से स्पष्ट है कि फ^{त} (य) = ० यह न − त घात का होगा इसलिये सब मान न − त से अधिक न होने चाहिए। इसलिये पहली बात असम्भव है। तब सिद्ध हुआ कि फ (य) = ० इसके कम से कम आ असम्भव मूल होंगे।

७२—११वें प्रक्रम से यदि फ (य) का न − त − १ संख्यक उत्पन्न फल निकालें और उसे शून्य के तुल्य करें तो

$$\frac{प_० य^{त+१} (न)!}{त+१\,!} + \cdots + \frac{प_{त-१}\, य^२ (न-त+१)!}{२\,!} + प_त य (न-त)!$$

$+ प_{त+१} (न-त-१)! = ०$ ऐसा होगा। इसमें य के स्थान में $\frac{१}{र}$ का उत्थापन देने से, $र^{त+१}$ से गुण देने से और $प_{त+१} (न-त-१)$ इससे भाग देने से

$$र^{त+१} + \frac{(न-त)\, प_त}{प_{त+१}} र^त$$

$$+ \frac{(न-त+१)\,(न-त)}{१\,!} \cdot \frac{प_{त-१}}{प_{त+१}} र^{त-१} + \cdots\cdots = ०$$

इसके यदि सब मूल संभाव्य होंगे तो मूलों का वर्गयोग अवश्य धन होगा। इसलिये ३४वें प्रक्रम से

$$\frac{(न-त)^२\, प^२_त}{प^२_{त+१}} > (न-त+१)\,(न-त) \frac{प_{त-१}}{प_{त+१}}$$

$$वा\quad प^२_त > \frac{(न-त+१)\, प_{त-१}\, प_{त+१}}{न-त}$$

$$वा\quad प^२_त > प_{त-१}\, प_{त+१}$$

इसलिये यदि पास पास के कोई तीन पदों के गुणक में मध्य का वर्ग आदि और अन्त के घात से अल्प हो तो अवश्य कहेंगे कि $फ^{न-त+१} (य) = ०$ इसका कम से कम एक जोड़ा असम्भव मूल होगा। इसलिये ७१वें प्रक्रम से $फ (य) = ०$ इसका भी कम से कम एक जोड़ा असम्भव मूल अवश्य होगा।

७३—फ′ (य)=० इसके जितने सम्भाव्य मूल हैं यदि वे विदित हों तो फ (य)=० इसके जितने सम्भाव्य मूल होंगे उनकी संख्या मालूम हो जायगी।

कल्पना करो कि फ′ (य) = ० इसके सम्भाव्य मूल क्रम से एक से एक अधिक $अ_१, अ_२, अ_३, \cdots अ_त$ हैं तो फ (य) में य के स्थान में $-\infty$ $अ_१, अ_२ \cdots अ_त + \infty$ = ०

इनका क्रम से उत्थापन देने से कोई दो पास के फल विरुद्ध चिन्ह के होंगे तो १९वें और ७०वें प्रक्रमों से य के उन दो मानों के भीतर फ (य) = ० इसका एक मूल अवश्य होगा। इसलिये फ (य) में य के स्थान में ऊपर लिखे हुए मानों का क्रम से उत्थापन देने से जो श्रेढ़ी प्राप्त होगी उसमें जितने व्यत्यास होंगे उतने ही फ (य) = ० इसके सम्भाव्य मूल आवेंगे।

यदि ऊपर लिखित य के किसी मान के उत्थापन देने से फ (य) यह शून्य के तुल्य हो तो स्पष्ट है कि फ (य) = ० इसके कई मूल समान हैं जो ५९वें प्रक्रम से व्यक्त हो जायंगे।

जैसे यह जानना चाहते हैं कि किस स्थिति में

$य^३ - त_२ य + त_३ = ०$ इस समीकरण के सब मूल सम्भाव्य होंगे जब यह ज्ञात है कि $त_२$ धन सम्भाव्य संख्या है।

यहां फ′ (य) = $३य^२ - त_२$ इसलिये फ′ (य) = ० इसका एक मूल = $+\sqrt{\frac{त_२}{३}} = अ_१$ दूसरा = $-\sqrt{\frac{त_२}{३}} = अ_२$ । इस प्रकार से फ′ (य) = ० इसके दोनों मूल सम्भाव्य हुए।

फ (य) में य के स्थान में इन दोनों मूलों का उत्थापन देने से

$$फ\,(अ_१) = \left(\frac{त_२}{३}\right)^{\frac{३}{२}} - त_२\left(\frac{त_२}{३}\right)^{\frac{१}{२}} + त_३$$

$$= -२\left(\frac{त_२}{३}\right)^{\frac{३}{२}} + त_३ \text{ ।}$$

$$फ\,(अ_२) = -\left(\frac{त_२}{३}\right)^{\frac{३}{२}} + त_२\left(\frac{त_२}{३}\right)^{\frac{१}{२}} + त_३$$

$$= २\left(\frac{त_२}{३}\right)^{\frac{३}{२}} + त_३ \text{ ।}$$

अब यदि $त_३ > २\left(\frac{त_२}{३}\right)^{\frac{३}{२}}$ वा $\left(\frac{त_३}{२}\right)^{२} > \left(\frac{त_२}{३}\right)^{३}$ तो

यदि $त_३$ धन हो तो फ $(अ_१)$ और फ $(अ_२)$ दोनों धन हुए। इसलिये

$$\begin{matrix} फ\,(-\infty), & फ\,(अ_२), & फ\,(अ_१), & फ\,(-\infty) \\ - & + & + & + \end{matrix}$$

यहां एक ही व्यत्यास हुआ इसलिये फ $(य) = ०$ इसका एक ही सम्भाव्य मूल होगा।

यदि $त_३$ ऋण और $\left(\frac{त_३}{२}\right)^{२} > \left(\frac{त_२}{३}\right)^{३}$ तो फ $(अ_१)$ और फ $(अ_२)$ दोनों ऋण होंगे तब

$$\begin{matrix} फ\,(-\infty), & फ\,(अ_२), & फ\,(अ_१), & फ\,(+\infty) \\ - & - & - & + \end{matrix}$$

यहां भी एक ही व्यत्यास हुआ इसलिये फ $(य) = ०$ इसका एक ही सम्भाव्य मूल होगा जो $अ_१$ से बड़ा होगा।

पुनः कल्पना करो कि $\left(\frac{त_1}{2}\right)^2 < \left(\frac{त_2}{3}\right)^3$ तो चाहे $त_1$ धन वा ऋण हो फ $(अ_1)$ ऋण और फ $(अ_2)$ धन होगा। इसलिये

$$फ(-\infty),\ फ(अ_2),\ फ(अ_1),\ फ(+\infty)$$
$$-\qquad +\qquad -\qquad +$$

यहां तीन व्यत्यास हुए इसलिये फ (य) = ० इसके तीन मूल संभाव्य हुए।

७४—प्रत्येक व्यत्यास में फ (य) = ० इसका एक ही मूल होगा।

कल्पना करो कि फ (य) = ० इसके धन मूलों की प्रधान सीमा अ और ऋण मूलों की प्रधान सीमा —क है और कोई दो मूलों का अन्तर ज से छोटा नहीं है तो फ (य) में य के स्थान में अ, अ—ज, अ — २ज,……

अ — (त — १)ज, अ — त ज (जहां अ — (त — १)ज यह —क से बड़ी और अ—त ज छोटी है) इत्यादि का उत्थापन देने से फ (य) के जो अनेक मान आवेंगे उनमें जिन दो दो मानों के बीच व्यत्यास होगा य के उन दो मानों के बीच फ (य) = ० इसका एक मूल अवश्य होगा क्योंकि यदि मान लो कि य के स्थान में अ—२ज और अ—३ज के उत्थापन से फ (य) में व्यत्यास हुआ तो फ (य) = ० इसका एक ही कोई मूल अ—२ज और अ—३ज इनके भीतर होगा। यदि मानो कि अ—२ज और अ—३ज इनके भीतर दो होंगे तो उनका अन्तर अ—२ज और अ—३ज इनके अन्तर ज से छोटा होगा। परन्तु

ज को तो सब अन्तरों से छोटा पहिले मान लिया है इसलिये दो मूलों का अन्तर ज से भी छोटा होना असम्भव है। इस-लिये एक एक व्यत्यास में फ (य) = ० इसका एक ही मूल होगा।

जैसे $य^३ - ३य^२ - ४य + १३ = ०$ इस पर से ४१वें प्रक्रम के दूसरे उदाहरण से फ (य) = ० इसके मूलों के अन्तर वर्ग के समान जिस समीकरण के मूल हैं उसका स्वरूप

$र^३ - ४२र^२ + ४४१र - ४९ = ०$ ऐसा होगा। इसमें यदि $र = \frac{१}{ल}$ तो

$$४९ल^३ - ४४१ल^२ + ४२ल - १ = ०$$

$$\text{वा}\ ४९ल^२ (ल - ९) + ४२(ल - \tfrac{१}{४२}) = ०$$

इसमें प्रधान सीमा ९ आई। इसलिये र की कनिष्ठ सीमा $\frac{१}{९}$ हुई।

फ (य) = ० इसके कोई दो मूलों का अन्तर $\sqrt{\frac{१}{९}} = \frac{१}{३}$ इससे छोटा न होगा और फ (य) = ० इसके धनात्मक मूलों की प्रधान सीमा ५६वें प्रक्रम से $४ + १ = ५$ होगी और ५७वें प्रक्रम से ऋण मूलों की सीमा $-(१ + \sqrt{४}) = -३$ यह होगी। इसलिये य के स्थान में $५, ५ - \frac{१}{३}, ५ - \frac{२}{३}, ५ - १, ४ - \frac{१}{३}, \ldots\ldots$ इत्यादि के उत्थापन से जो फ (य) के अनेक मान आवेंगे उनसे स्पष्ट जान पड़ेगा कि ३ और $२\frac{२}{३}$, $२\frac{२}{३}$ और $२\frac{१}{३}$, और -२ और $-२\frac{१}{३}$ इनके बीच फ (य) = ० इसका एक एक मूल पड़ा हुआ है।

७५—इस प्रक्रम में पिछले प्रक्रमों की व्याप्ति के लिये क्रिया समेत कुछ उदाहरणों को दिखलाते हैं।

(१) $य^{८} - ८य^{२} + य + २ = ०$ इसके धन मूलों की प्रधान सीमा बतलाओ।

यहां ५६वें प्रक्रम से, सब से बड़े ऋणात्मक गुणक की संख्या ८ है। इसलिये प्रधान सीमा $८ + १ = ९$ हुई। ५८वें प्रक्रम से भी यही आती है।

(२) $य^{५} + य^{४} + य^{३} - ११य + ५ = ०$ इसके धनात्मक मूलों की प्रधान सीमा क्या होगी।

यहां ५६वें प्रक्रम से प्रधान सीमा $११ + १ = १२$ और ५८वें प्रक्रम से

$$१ + \left(११\right)^{\frac{१}{३}}$$ यह अर्थात् ४ हुई जो पहले से छोटी है।

यहां ५९वें प्रक्रम से $\frac{११}{१ + १ + १} + १$ यह अर्थात् ५ भी प्रधान सीमा आती है जो १२ से छोटी है।

(३) $य^{७} + ५य^{६} - ४य^{५} + ६य^{४} - १०य^{३} - १२य^{२} + ७य - ९ = ०$ इसके धनात्मक मूलों की प्रधान सीमा क्या है।

यहां ५६वें प्रक्रम से १३, और ५९वें प्रक्रम से

$\frac{४}{१ + ५}, \frac{१०}{१ + ५ + ६}, \frac{१२}{१ + ५ + ६}, \frac{९}{१ + ५ + ६ + ७}$ इन भिन्नों में सब से बड़ा तीसरा है इसलिये प्रधान सीमा २ हुई जो १३ से छोटी है।

(४) $य^{४} - ५य^{३} + २५य^{२} - ३य + १९ = ०$ इसके रूपान्तर से धन मूलों की प्रधान सीमा का पता लगाओ।

यहां इसका रूपान्तर

$$य^{४} - ५य^{३} + ६य^{२} + २८य^{२} - ३य + १६ = ०$$

वा $य^{२}(य^{२} - ५य + ६) + २८य\left(य - \frac{३}{२८}\right) + १६ = ०$

यहां $य^{२} - ५य + ६ = ०$ इसके असम्भव मूल आते हैं। इसलिये यह ६१वें प्रक्रम से य के किसी सम्भाव्य मान में धन ही होगा तब दूसरे खण्ड पर से प्रधान सीमा १ हुई।

(५) $५य^{५} - ८य^{४} - ११य^{३} - २३य^{२} - १०य - ३११ = ०$ रूपान्तर कर इसके धनात्मक मूलों की प्रधान सीमा बतलाओ।

यहां $५य^{५}$ का पांच विभाग कर प्रत्येक ऋण पद में मिला कर समान गुणकों के अलगाने से रूपान्तर

$$य^{४}(य - ८) + य^{३}(य^{२} - ११) + य^{२}(य^{३} - २३) + य(य^{४} - १०) + (य^{५} - ३११) = ०$$

इस पर से प्रधान सीमा ८ हुई।

(६) $य^{४} - य^{३} - ३य^{२} - ५य - २३ = ०$ इसके रूपान्तर से धनात्मक मूलों की प्रधान सीमा क्या है।

यहां ४ पद ऋण हैं और सब से बड़ा य का घात भी ४ ही है इसलिये दोनों पक्षों को ४ से गुण कर $४य^{४}$ का चार भाग कर चारो ऋण पदों में मिलाने से रूपान्तर

$$य^{३}(य - ४) + य^{२}(य^{२} - १२) + य(य^{३} - २०) + (य^{४} - ९२) = ०$$

इसके धनात्मक मूलों की प्रधान सीमा ४ हुई जो और दूसरे प्रकारों से आई हुई सीमाओं से छोटी है।

(७) न्यूटन की रीति से

$फ(य) = य^४ - २य^३ - ३य^२ - १५य - ३ = ०$ इसके धन मूलों की प्रधान सीमा क्या है।

६३वें प्रक्रम से, यहां $फ(य) = य^४ - २य^३ - ३य^२ - १५य - ३$

$$फ'(य) = ४य^३ - ६य^२ - ६य - १५$$

$$\frac{१}{२} फ''(य) = ६य^२ - ६य - ३$$

$$\frac{१}{३!} फ'''(य) = ४य - २$$

यहां $य = १$ तो $फ'''(य)$ धन; $य = २$ तो $फ''(य)$ धन; $य = ३$ तो $फ'(य)$ धन और $य = ४$ तो $फ(य)$ धन होता है इसलिये धन मूलों की प्रधान सीमा ४ हुई।

(८) $य^३ - ८य^२ + ४य + ४८ = ०$ इसके धन मूलों की प्रधान सीमा क्या होगी।

यहां य का चाहे शून्य से लेकर जो धन मान मानों सब में $फ(य)$ धन ही होता है इसलिये धन मूलों की प्रधान सीमा यदि शून्य को कहें तो अशुद्ध है। ५६वें प्रक्रम से यहां $८ + १ = ९$ प्रधान सीमा ठीक है। यही ५९वें प्रक्रम से भी आती है। ६४वें प्रक्रम की युक्ति से यहां $य = -र$ का उत्थापन देने से

$$र^३ + ८र^२ + ४र - ४८ = ०$$

$$वा\ र(र^२ + ८र + ४र) - ४८ = ०$$

यहां यदि $र = २$ तो $फ(र)$ शून्य के तुल्य होता है और यदि र दो से अधिक हो तो $फ(र)$ धन होता है। इसलिये

य के ऋणमान की सीमा २ हुई। इसे फ (य) के $य^२$ के विपरीत चिन्ह गुणक में अर्थात् ८ में घटा देने से प्रधान सीमा ६ हुई।

(६) सिद्ध करो कि $य^न - न अ य + (न-१)क = ०$ इसके सम्भव मूल कब और किस स्थिति में आवेंगे।

यहां $फ'(य) = न य^{न-१} - न अ = ० \therefore य = अ^{\frac{१}{न-१}} = अ_१$ यदि न सम हो।

इसलिये फ′ (य) में य का एक ही सम्भाव्य मान निकला। इसका उत्थापन फ (य) में देने से

$$फ(य) = अ^{\frac{न}{न-१}} - न अ^{\frac{न}{न-१}} + (न-१) क$$

$$= -(न-१)अ^{\frac{न}{न-१}} + (न-१) क = ०$$

इसलिये यदि $अ^न < क^{न-१}$ तो फ (य) का मान धन होगा और यदि $अ^न > क^{न-१}$ तो फ (य) ऋण होगा। अब न के सम होने से ७३वें प्रक्रम से

$फ(-\infty)$,	$फ(अ_१)$,	$फ(+\infty)$	
+	+	+	पहिली स्थिति में।
+	−	+	दूसरी स्थिति में।

इसलिये यदि $अ^न < क^{न-१}$ तो $फ(य) = ०$ इसका कोई सम्भाव्य मूल न होगा और यदि $अ^न > क^{न-१}$ तो दो सम्भाव्य मूल होंगे।

इसी प्रकार न के विषम होने से यदि $अ^{न} > क^{न-१}$ तो फ $(य) = ०$ इसके तीन और यदि $अ^{न} < क^{न-१}$ तो एक सम्भाव्य मूल होगा।

(१०) $य^{न} (य-१)^{न} = ०$ स्पष्ट है कि इसके सब मूल सम्भाव्य हैं जिनमें न शून्य के और +१ के समान है। अब इसके न वारोत्पन्न फल पर से दिखलाओ कि

$$य^{न} - न\frac{न}{२न}य^{न-१} + \frac{न(न-१)}{१.२} \cdot \frac{न(न-१)}{२न(२न-१)}य^{न-२} - \cdots = ०$$

इसके सब सम्भाव्य मूल ० और १ के बीच में पड़े हैं।

यहां ११वें प्रक्रम में $\frac{र^{त}}{त!}$ का गुणक है उसमें न के स्थान में २न का और त के स्थान में न का उत्थापन देने से और फ $(य) = य^{न} (य-१)^{न}$ इसका रूप द्वियुक् पद सिद्धान्त से फैलाने से स्पष्ट है कि ऊपर का समीकरण $फ^{न} (य) = ०$ यह है और ७१वें प्रक्रम से इसके सब सम्भाव्य मूल ० और १ के बीच में होंगे क्योंकि फ $(य) = ०$ इसके सब सम्भाव्य मूल ० और १ के बीच में हैं। इसलिये $फ' (य) = ०$ इसके भी सब सम्भाव्य मूल ० और १ के बीच में होंगे। फिर इसके प्रथमोत्पन्न फल $फ'' (य) = ०$ इसके भी सम्भाव्य मूल ऊपर ही की युक्ति से ० और १ के बीच में होंगे। इसी प्रकार आगे भी क्रिया करते जाओ तो स्पष्ट हो जायगा कि $फ^{न} (य) = ०$ इसके भी सब सम्भाव्य मूल ० और १ के बीच में होंगे।

अभ्यास के लिये प्रश्न

(१) $य^{६} - ४य^{५} + २य^{४} + ११य^{३} - १०य^{२} + २ = ०$ इसके धन और ऋण मूलों की प्रधान सीमाओं को बताओ।

(२) $य^{४} - ८य^{३} + १२य^{२} + ६य - ३१ = ०$ इसका इस प्रकार से रूपान्तर करो कि धन मूलों की प्रधान सीमा ६ हो।

(३) सिद्ध करो कि $य^{५} + ५य^{४} - २०य^{२} - १९य - २ = ०$ इसका एक धन मूल २ और ३ के बीच होगा और कोई धन मूल ३ से बड़ा न होगा। एक ऋण मूल −५ और −४ के होगा और कोई ऋण मूल −५ से अल्प न होगा।

(४) न्यूटन की रीति से नीचे लिखे हुए समीकरणों के मूलों की सीमाओं का ज्ञान करोः—

(१) $य^{४} - २य^{३} + ६य^{२} + ७य - १० = ०$।

(२) $य^{४} - ४य^{२} + ५य - २ = ०$।

(३) $य^{४} - २य^{३} + ५य^{२} + २य - ५ = ०$।

(४) $य^{४} - ४य^{३} + १०य^{२} - १९ = ०$।

(५) $य^{४} - ३य^{३} + २य^{२} + य - ३ = ७$।

(६) $य^{४} - ७य^{३} + य^{२} - ३ = ०$।

(५) नीचे लिखे हुए समीकरणों के सम्भाव्य मूलों की संख्या और स्थिति को बतलाओः—

(१) $य^{३} - १२य + १७ = ०$।

(२) $य^{४} - ३२य \mp २० = ०$।

(३) $य^{३} - ४य + ३ = ०$।

(४) $४य^{३} + ९य^{२} - १२य + २ = ०$।

(५) $य^{७} - अ^{५} य^{२} + क^{७} = ०$।

(६) $य^{२न} - प य^{२} + त = ०$।

(६) यदि $\text{फ}(\text{य}) = (\text{य}^{२} - १)^{\text{न}} = ०$ तो दिखलाओ कि

$$\text{य}^{\text{न}} - \text{न}\,\frac{\text{न}(\text{न}-१)}{२\text{न}(२\text{न}-१)}\,\text{य}^{\text{न}-२} +$$

$$\frac{\text{न}(\text{न}-१)}{२\,!}\cdot\frac{\text{न}(\text{न}-१)(\text{न}-२)(\text{न}-३)}{२\text{न}(२\text{न}-१)(२\text{न}-२)(२\text{न}-३)}\,\text{य}^{\text{न}-४} - \cdots\cdots = ०$$

इसके सब सम्भाव्य मूल −१ और १ के बीच में होंगे।

(७) यदि त, थ, द इन तीनों में से कोई दो शून्य के तुल्य हों तो सिद्ध करो कि

$$(\text{य}-\text{अ})(\text{य}-\text{क})(\text{य}-\text{ग}) - \text{त}^{२}(\text{य}-\text{अ}) - \text{थ}^{२}(\text{य}-\text{क}) - \text{द}^{२}(\text{य}-\text{ग}) - २\,\text{त}\,\text{थ}\,\text{द} = ०$$

इस समीकरण के सब मूल सम्भाव्य होंगे।

(८) यदि $\text{फ}(\text{य}) = \text{य}^{\text{न}}(१-\text{य})^{\text{न}} = ०$ तो इस पर से सिद्ध करो कि

$$१ - \frac{\text{न}}{१}\,\frac{\text{न}+१}{१}\,\text{य} + \frac{\text{न}(\text{न}-१)}{२\,!}\,\frac{(\text{न}+१)(\text{न}+२)}{२\,!}\,\text{य}^{२} - \cdots\cdots = ०$$

इसके सब मूल ० और १ के बीच में होंगे।

(९) $\text{फ}(\text{य}) = \text{प}_{०}\text{य}^{\text{न}} + \text{प}_{१}\text{य}^{\text{न}-१} + \text{प}_{२}\text{प}^{\text{न}-२} + \cdots\cdots + \text{य} - \text{त} = ०$ इसमें यदि पदों के सब संख्यात्मक गुणकों से प बड़ा हो और त धनात्मक हो परन्तु $\frac{१}{२+४\text{त}}$ इससे छोटा हो तो अव्यक्त का एक धन सम्भाव्य मान २त से अल्प होगा।

(१०) $३\text{य}^{४} + ८\text{य}^{३} - ६\text{य}^{२} - २४\text{य} + \text{त} = ०$ इसमें यदि −८ से छोटा और −१३ से बड़ा त हो तो समीकरण के चार

सम्भाव्य मूल, यदि -८ से बड़ा और १६ से छोटा न हो तो दो सम्भाव्य मूल और यदि १६ से बड़ा न हो तो कोई सम्भाव्य मूल न होगा ।

७—समीकरणों का लघूकरण

७६—समीकरण के किसी दो मूलों में किसी प्रकार के ज्ञात सम्बन्ध से अल्प घात के नये समीकरण द्वारा उन दोनों मूलों के जानने की रीति को समीकरण का लघूकरण कहते हैं ।

दिए हुए किसी समीकरण के दो मूलों में परस्पर सम्बन्ध को जानते हो तो उस संबन्ध से अल्प घात का एक नया समीकरण बना सकते हो जिसका एक मूल दिए हुए समीकरण के एक मूल के समान होगा ।

जैसे $फ(य) = प_० य^न + प_१ य^{न-१} + \cdots + प^न = ०$ इसके यदि दो मूल $अ_१$ और $अ_२$ हैं और इनमें $अ_२ = फा(अ_१)$ इस प्रकार का संबन्ध है तो $अ_१$ के स्थान में $य$ का उत्थापन देने से

$$फ\left\{फा(य)\right\} = प_० \left\{फा(य)\right\}^न + प_१ \left\{फा(य)\right\}^{न-१} + \cdots प_न$$

यदि फ $\left\{ \text{फा} (\text{य}) \right\}$ इसको फि (य) कहें तो य के स्थान में अ_1 का उत्थापन देने से

फि (अ_1) = फ $\left\{ \text{फा} (\text{अ}_1) \right\}$ = फ (अ_2) = ० क्योंकि अव्यक्त का अ_2 यह एक मान है। इस लिये फि (य) = ० और फ (य) = ०

इनके मूलों में अ_1 यह एक मूल उभयनिष्ठ हुआ और फ (य) और फि (य) का महत्तमापवर्त्तन अवश्य अव्यक्तात्मक निकलेगा जिसे शून्य के समान करने से अ_1 यह व्यक्त हो जायगा। यदि महत्तमापवर्त्तन में अव्यक्त के वर्गादि रहें तो अ_1 इसके दो तीन इत्यादि मान आवेंगे। फिर अ_1 के मान से और अ_2 = फा (अ_1) इस संबन्ध से अ_2 का भी ज्ञान हो जायगा।

इस प्रकार फ (य) = ० इसके दो मूल अ_1 और अ_2 ज्ञात हो गए। तब (य − अ_1) (य − अ_2) इससे फ (य) = ० में भाग देने से लब्धि दो घात कम और निःशेष मिलैगी अर्थात् यदि फ (य) = ० यह न घात का समीकरण होगा तो लब्धि न − त घात का समीकरण होगी। इस प्रकार दो मूलों के सम्बन्ध से दिए हुए समीकरण से दो अल्प घात का एक नया समीकरण बन जायगा।

उदाहरण—(१) फ (य) = $\text{य}^3 - ५\text{य}^2 - ४\text{य} + २० = ०$ इसके दो मूल ऐसे हैं जिनका अन्तर ३ होता है तो सब मूलों को बतलाओ।

यहां जिन दो मूलों का अन्तर ३ है यदि उनको $अ_१$ और $अ_२$ मान लें तो

$अ_२ = अ_१ + ३ =$ फा $(अ_१)$ इस लिये ऊपर के समीकरण में य + ३ का उत्थापन देने से

$$फि\,(य) = (य + ३)^३ - ५(य + ३)^२ - ४(य + ३) + २०$$
$$= य^३ + ९य^२ + २७य + २७ - ५य^२ - ३०य - ४५ - ४य - १२ + २०$$
$$= य^३ + ४य^२ - ७य - १०$$

फ (य) और फि (य) का महत्तमापवर्त्तन य − २ हुआ। इसे शून्य के तुल्य करने से य अर्थात् $अ_१ = २$ हुआ। इसका उत्थापन $अ_१$ में देने से $अ_२ = अ_१ + ३ = ५$ हुआ। फिर (य − २) (य − ५) इसका भाग फ (य) में देने से लब्धि = य + २ = ० इस लिये य का तीसरा मान − २ हुआ।

(२) फ $(य) = य^४ - ५य^३ + ११य^२ - १३य + ६ = ०$ इसके दो मूल $अ_१$ और $अ_२$ के बीच $२अ_२ + ३अ_१ = ७$ सम्बन्ध है तो सब मूलों को बताओ।

यहां सम्बन्ध समीकरण से $अ_२ = \frac{७ - ३अ_१}{२} =$ फा $(अ_१)$

ऐसा हुआ इसलिये फ (य) में फा $(य) = \frac{७ - ३अ_१}{२}$ इसका उत्थापन देने से, हर को समच्छेद कर उड़ा देने से और ९ का भाग देने से

$$फि\,(य) = ९य^४ - ५४य^३ + १२८य^२ - १३८य + ५४$$

फ (य) और फि (य) का महत्तमापवर्त्तन य—१ हुआ। इसे शून्य के तुल्य करने से $अ_१ = १$। इसका उत्थापन $अ_१$ में देने से $अ_२ = २$। फिर फ (य) में (य—१) (य—२) का भाग देकर लब्धि को शून्य के समान करने से और दो मूल $१+\sqrt{-२}$, $१-\sqrt{-२}$ ये आते हैं।

७७—यदि फ (य) = ० इसके $अ_१, अ_२, अ_३$ इन तीन मूलों में

$$अ अ_१ + क अ_२ + ग अ_३ = घ$$

ऐसा सम्बन्ध हो तो यहां सम्बन्ध समीकरण से

$$अ_३ = \frac{घ - अ अ_१ - क अ_२}{ग}$$

फिर उत्थापन से फ $(अ_१) = ०$, फ $(अ_२) = ०$,

$$फ\left(\frac{घ - अ अ_१ - क अ_२}{ग}\right) = ०$$

ऐसे तीन समीकरण होंगे। अन्त के दो समीकरणों से $अ_२$ की दो उन्मितिओं पर से एक

फा $(अ_१) = ०$ ऐसा समीकरण बनेगा। इसमें $अ_१$ के स्थान में य का उत्थापन देने से फा (य) = ० और फ (य) = ० इनके मूलों में से एक मूल $अ_१$ उभयनिष्ठ होगा जो महत्तमापवर्त्तन की युक्ति से सहज में व्यक्त हो जायगा।

७८—समीकरण के मूलों और पदों के जो सम्बन्ध २५वें प्रक्रम में लिखे हैं उनके बल से भी जिस समीकरण के मूलों के परस्पर सम्बन्ध दिए हों उन मूलों को सहज में निकाल सकते में। जैसे उदाहरण—(१) $य^३ - ६य^२ + ११य - ६ = ०$

यदि इसके मूल $अ_१$, $अ_२$ और $अ_३$ हों और उनमें $२अ_१ + ३अ_२ + ४अ_३ = ०$ ऐसा सम्बन्ध हो तो उन मूलों को व्यक्त करो।

यहां २५वें प्रक्रम से $अ_१ + अ_२ + अ_३ = ६ \cdots\cdots (१)$

$$२अ_१ + ३अ_२ + ४अ_३ = २० \cdots\cdots (२)$$

(१) का दूना (२) में घटा देने से $अ_२ + २अ_३ = ८$

$$\therefore\ अ_२ = ८ - २अ_३ = फा\,(अ_३)$$

फ (य) में ८ − २य का उत्थापन देने से

$$फि\,(य) = (८ - २य)^३ - ६\,(८ - २य)^२ + ११\,(८ - २य) - ६$$

$$= ५१२ - ३८४य + ९६य^२ - ८य^३ - ३८४ + १९२य$$

$$- २४य^२ + ८८ - २२य - ६$$

$$= २१० - २१४य + ७२य^२ - ८य^३ = ०$$

− २ का अपवर्त्तन देने से

$$फि\,(य) = ४य^३ - ३६य^२ + १०७\,य - १०५$$

फ (य) और फि (य) का महत्तमापवर्त्तन यहां य − ३ आता है।

इसलिये $अ_३ = ३$, $अ_२ = ८ - २अ_३ = २$, तब $अ_१ = १$

(२) फ (य) = ० इसके दो दो मूलों का योग २ त अर्थात् यदि एक जोड़े मूल $अ_१$, $अ_२$ हों तो $अ_१ + अ_२ = २त$, है तो मूलों को बताओ।

यहां $अ_२ = २त - अ_१$ वा $अ_१ = २त - अ_२$

इसलिये फ (य) = ० और फ (२त — य) = ०। परन्तु यहां दोनों फल एक रूप हो जायंगे। क्योंकि फ ($अ_1$) = ० = फ (२त — $अ_2$) और

$$फ (अ_2) = ० = फ (२त - अ_1)$$

इसलिये दोनों फल में उभयनिष्ठ मूल $अ_1$, $अ_2$ हैं।

इसी प्रकार प्रत्येक जोड़ा मूल दोनों फलों में आवेंगे। इस लिये दोनों फल एक रूप के होंगे। अब यहां महत्तमापवर्त्तन की युक्ति से मूल नहीं निकल सकते क्योंकि दोनों फल का महत्तमापवर्त्तन फ (य) यही हुआ। तब जान पड़ा कि फ (य) = ० यह जितने घात का समीकरण होगा उतने ही घात का समीकरण महत्तमापवर्त्तन की विधि से भी बना जिसके मूल जानने में कुछ भी सुगमता न पड़ैगी।

इसलिये यहां कल्पना करो कि

$$\left.\begin{array}{l} अ_1 - अ_2 = २ल \\ अ_1 + अ_2 = २त \end{array}\right\} \therefore अ_1 = त + ल ।$$

इसका उत्थापन फ ($अ_1$) = ० में देने से फ (त + ल) = ० ऐसा होगा। अब इस पर से ल का मान जानने से तत्सम्बन्धी $अ_1$ और $अ_2$ आ जायंगे। जब जानते हैं कि फ (य) = ० इसके एक एक जोड़े मूल आवेंगे तब स्पष्ट है कि यह समघात का समीकरण होगा।

मान लो कि

$$फ (य) = (य - अ_1)(य - अ_2)(य - अ_3)(य - अ_4)\cdots\cdots$$

$$\text{तब फ}(\text{ल}+\text{त}) = (\text{त}+\text{ल}-\text{अ}_1)(\text{त}+\text{ल}-\text{अ}_2) \times (\text{त}+\text{ल}-\text{अ}_3)(\text{त}+\text{ल}-\text{अ}_4)\cdots\cdots$$

$$= \left\{ \text{ल}^2 - \left(\frac{\text{अ}_1-\text{अ}_2}{2}\right)^2 \right\} \times \left\{ \text{ल}^2 - \left(\frac{\text{अ}_3-\text{अ}_4}{2}\right)^2 \right\}\cdots\cdots$$

इसलिये फ $(\text{त}+\text{ल}) = 0$ में ल के समघात रहेंगे। इसमें यदि ल^2 को एक अव्यक्त राशि मान लें तो जितने घात का फ $(\text{य}) = 0$ यह समीकरण होगा उसके आधे घात का फ $(\text{त}+\text{ल}) = 0$ यह समीकरण होगा।

अथवा कल्पना करो कि $\text{अ}_1\text{अ}_2 = \text{ल}$ तो

$$(\text{य}-\text{अ}_1)(\text{य}-\text{अ}_2) = \text{य}^2 - (\text{अ}_1+\text{अ}_2)\text{य} + \text{अ}_1\text{अ}_2$$
$$= \text{य}^2 - \text{तय} + \text{ल}$$

इसलिये फ (य) यह $\text{य}^2 - \text{तय} + \text{ल}$ इससे निःशेष होगा।

अब फ (य) में बीजगणित की साधारण रीति से $\text{य}^2 - \text{तय} + \text{ल}$ इसका भाग तब तक देते जाओ जब तक कि शेष $\text{पा}\,\text{य} + \text{वा}$ ऐसा न हो। पा और वा को य से स्वतन्त्र समझना चाहिए अर्थात् ये दोनों ल के फल होंगे।

अब पूर्व युक्ति से स्पष्ट है कि शेष शून्य होगा इसलिये $\text{पा} = 0$ और $\text{व} = 0$ होंगे। इसलिये ल का कोई मान अवश्य ऐसा होगा जिससे दोनों समीकरण सत्य होंगे। इसलिये पा और वा में एक मान उभयनिष्ठ हुआ जो महत्तमापवर्त्तन की युक्ति से निकल आवेगा।

तब $अ_१ + अ_२ = २त$ और $ल = अ_१ अ_२$ इन समीकरणों से $अ_१$ और $अ_२$ व्यक्त हो जायंगे।

(३) $फ(य) = य^न + प_१ य^{न-१} + प_२ य^{न-२} + \cdots + प_न = ०$

इसके सब मूल योगान्तर श्रेढ़ी में हैं तो मूलों को बताओ।

यहां यदि पहला मूल $= अ$ और चय $= क$ ऐसी कल्पना की जाय तो सब मूल क्रम से

$$अ, अ + क, अ + २क, \ldots\ldots, अ + (न - १)क$$ होंगे।

२५वें प्रक्रम से

$$-प_१ = अ + (अ + क) + (अ + २क) + \cdots\cdots + \left\{ अ + (न - १)क \right\}$$

और $$प^२_१ - २प_२ = अ^२ + (अ + क)^२ + \cdots\cdots\cdots\cdots + \left\{ अ + (न - १)क \right\}^२$$

अर्थात् $$-प_१ = नअ + \frac{न(न - १)}{२} क, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (१)$$

और $$प^२_१ - २प_२ = नअ^२ + न(न - १)अक + \frac{न(न - १)(२न - १)}{६} क^२ \cdots\cdots (२)$$

(१) के वर्ग को न गुणित (२) में घटा देने से

$$(न - १)प^२_१ - २नप_२ = \frac{न^२(न^२ - १)}{१२} क^२ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (३)$$

इस पर से क व्यक्त हो जायगा फिर अ भी व्यक्त होगा।

(४) फ (य) = $य^३ - ३य^२ - ४य + १२ = ०$ यदि इसके एक मूल का चिन्ह बदल दिया जाय तो दूसरा मूल होता है अर्थात् यदि दो मूल $अ_१$ और $अ^२$ हों तो $अ_२ = -अ_१$ यह सम्बन्ध है। तब सब मूलों को बतलाओ।

यहां ७६वें प्रक्रम से य के स्थान में $-य$ का उत्थापन देने से

फि (य) = $य^३ + ३य^२ - ४य - १२$

अब फ (य) और फि (य) के महत्तमापवर्त्तन से सब मूल निकाल सकते हो।

अथवा फ (य) = $य^३ - ३य^२ - ४य + १२ = ०$ ....(१)

फि (य) = $य^३ + ३य^२ - ४य - १२ = ०$ ....(२)

दोनों के अन्तर से

$६य^२ - २४ = ० \quad \therefore य = \pm २$

इसलिये फ (य) = ० इसके दो मूल $+२, -२$, ये हुए। इन पर से तीसरा मूल $+३$ आवेगा।

(५) $य^३ - ७य^२ + १४य - ८ = ०$ ....(१)

इसके दो मूलों का घात यदि २ हो तो मूलों को बताओ।

यदि दो मूल $अ_१$ और $अ_२$ हों तो $अ_१ \cdot अ_२ = २$

$\therefore अ_२ = \frac{२}{अ_१} =$ फ $(अ^१)$

इसलिये य के स्थान में $\frac{२}{य}$ का उत्थापन देने से

$$फ\left(\frac{२}{य}\right) = \frac{८}{य^३} - \frac{७ \times ४}{य^२} + \frac{२८}{य} - ८ = ८ - २८य + २८य^२ - ८य^३ = ०$$

इसमें -४ का भाग दे देने से मान लो कि

$$फि\,(य) = २य^३ - ७य^२ + ७य - २ = ० \cdots\cdots\cdots (२)$$

अब (१) और (२) के महत्तमापवर्त्तन $य - १$ को शून्य के समान करने से $अ_१ = १$ और $अ_२ = २$

इन पर से तीसरा मूल $अ_३ = ४$ आता है।

इस प्रकार से जहां जिस तरह से सुभीता पड़े वैसी क्रिया करनी चाहिए।

अभ्यास के लिये प्रश्न

१—$य^४ - ७य^३ + ११य^२ - ७य + १० = ०$ इसके दो मूल $अ_१$, $अ_२$ में $अ_२ = २अ_१ + १$ यह सम्बन्ध है। सब मूलों को बताओ। उत्तर $अ_१ = २$, $अ_२ = ५$ और दो मूल $= \pm\sqrt{-१}$

२—नीचे लिखे हुए समीकरणों के मूलों को बताओ जिनके दो मूल $अ_१$, $अ_२$ में $अ_२ = -अ_१$ यह सम्बन्ध है।

(१) $य^४ - २य^३ - २य^२ + ८य - ८ = ०$

(२) $य^४ + ३य^३ - ७य^२ - २७य - १८ = ०$

(३) $य^४ + ३य^३ + २य^२ + ९य - ३ = ०$

(४) $य^४ + य^३ - ११य^२ - ९य + १८ = ०$

३—$य^३ + प_१य^२ + प_२य + प_३ = ०$ इसके दो मूल $अ_१$ और $अ_२$ में यदि $अ_१अ_२ + १ = ०$ ऐसा सम्बन्ध है तो $प_१, प_२, प_३$ में कैसा सम्बन्ध होगा। उ० $१ + प_२ + प_१प_३ + प^२_३ = ०$

४—नीचे लिखे हुए समीकरणों के मूल योगान्तर श्रेढ़ी में हैं। मूलों को बताओ।

(१) $य^३ - ६य^२ + ११य - ६ = ०$

(२) $य^३ - ६य^२ + २३य - १५ = ०$

(३) $२य^४ - १६य^३ + २८य^२ + १६य - ३० = ०$

(४) $य^४ + ४य^३ - ४य^२ - १६य = ०$

५—$य^३ - २य^२ - य + २ = ०$ इसके दो मूलों का घात -१ है तो मूलों को बताओ। उ० १, −१, २।

६—$य^३ - ७य^२ + १४य - ८ = ०$ इसके क्रम से मूल $अ_१$, $२अ_१$, $४अ_१$ इस प्रकार के हैं तो सब मूलों का ज्ञान करो।

७—$य^४ - ६य^३ + ७य^२ + ६य - ८ = ०$ इसके दो दो मूल $अ+१, अ-१, क+१, क-१$, इस प्रकार से हैं। मूलों को बताओ। उ० १, −१, ४, २।

८—$य^५ - १२य^४ + ५५य^३ - १२०य^२ + १२४य - ४८ = ०$ इसके मूल $अ_१$, $२अ_१$, $अ_२$, $२अ_२$, $अ_१ + अ_२$ इस क्रम से हैं। मूलों को व्यक्त करो। उ० १, २, २, ४, ३।

९—नीचे लिखे हुए समीकरणों में अव्यक्त के कितने मान समान हैं।

(१) $य^४ + ३य^३ - ५य^२ - ६य - ८ = ०$

(२) $य^४ + य^३ - ९य^२ + १०य - ८ = ०$

उ० य = −४, वा य = ४

१०—$य^४ + पअय^३ + (म^२ + म) अ^२य^२ + प_१अ^३य + अ^४ = ०$ इसके सब मूल गुणोत्तर श्रेढी में हैं। सब मूलों को तथा प और $प_१$ को म और अ के रूप में बताओ।

[मान लो कि मूल क्रम से $\frac{अ_1}{क^2}$ $\frac{अ_1}{क}$ $अ_1$ क, $अ_1 क^2$ ये हैं। इनके घात $अ_1^4 = अ^4$, और दो दो मूलों के घातों का योग $= (म^2 + म)$ अ, इस पर से सब मूलों का पता लग जायगा और यह भी जान पड़ेगा कि $प = प_1$ ।]

८—हरात्मक समीकरण

७९—$\frac{१}{अ}$ को अ की हरात्मा कहते हैं। इसी प्रकार य की हरात्मा $\frac{१}{य}$ और $\frac{य}{र}$ की हरात्मा $\frac{र}{य}$ है।

हरात्मक समीकरण—अव्यक्त के स्थान में उसकी हरात्मा का उत्थापन देने से जिस समीकरण में कोई परिवर्त्तन नहीं होता उसको हरात्मक समीकरण कहते हैं।

अर्थात् फ (य) = ० इसके जितने मूल हैं उनके हरात्मा के समान अव्यक्त के मान जिस समीकरण में आते हैं उसका रूप ४०वें प्रक्रम से यदि

$$फ (य) = य^न + प_1 य^{न-1} + प_2 य^{न-2} + \cdots\cdots + प_न = ० \text{ यह हो तो}$$

$$प_न र^न + प_{न-1} र^{न-1} + प_{न-2} र^{न-2} + \cdots\cdots + प_1 र + १ = ०$$

ऐसा होगा।

इसमें $प_न$ का भाग दे देने से समीकरण का रूप

$$र^न + \frac{प_{न-1}}{प_न} र^{न-1} + \frac{प_{न-2}}{प_न} र^{न-2} + \cdots\cdots + \frac{प_1}{प_न} र + \frac{१}{प_न} = ०$$

ऐसा होगा।

इसमें यदि $\frac{प_{न-१}}{प_न} = प_१, \frac{प_{न-२}}{प_न} = प_२, \cdots \frac{प_१}{प_न} = प_{न-१}, \frac{१}{प_न} = प_न$

ऐसा हो तो स्पष्ट है कि जो रूप फ (य) = ० इसका है वही इस नये समीकरण का होगा। इसलिये य के स्थान में उसकी हरात्मा $\frac{१}{य}$ का उत्थापन देने से भी य के वे ही सब मान आवेंगे। इस प्रकार य के स्थान में यदि उसके हरात्मा का उत्थापन देने से जो नया समीकरण बने उसमें भी यदि दिए हुए समीकरण के य के मान के समान ही मान आवें तो उस नये समीकरण को हरात्मक समीकरण कहते हैं।

ऊपर गुणकों में जो सम्बन्ध दिखलाया है उसके अन्तिम समीकरण $\frac{१}{प_न} = प_न$ इससे $प^२_न = १$ ∴ $प_न = \pm १$। इसलिये हरात्मक समीकरण दो प्रकार के होते हैं। (१) जिसमें $प_न = +१$ और (२) जिसमें $प_न = -१$।

पहिले प्रकार के समीकरण में

$$प_{न-१} = प_१, प_{न-२} = प_२, \cdots\cdots प_१ = प_{न-१}$$

इससे सिद्ध होता है कि आदि पद से आगे और अन्त पद से पीछे तुल्यान्तरित पद के गुणक जिस समीकरण में तुल्य होते हैं वही पहिले प्रकार का हरात्मक समीकरण होता है। दूसरे प्रकार के हरात्मक समीकरण में

$$प_{न-१} = -प_१, प_{न-२} = -प_२, \cdots\cdots प_१ = -प_{न-१}$$

इससे सिद्ध होता है कि आदि पद से आगे और अन्त पद से पीछे तुल्यान्तरित गुणकों की संख्या जिस समीकरण

में समान रहती है परन्तु चिन्हों में व्यत्यास हो जाता है वही दूसरे प्रकार का हरात्मक समीकरण होता है।

८०—किसी हरात्मक समीकरण को पहिले प्रकार का समघात का समीकरण बनाना।

कल्पना करो कि किसी हरात्मक समीकरण का $अ_१$ यह एक मूल है तो इसके आदि समीकरण में जिससे यह हरात्मक समीकरण बना है एक अव्यक्त मान $\frac{१}{अ_१}$ यह होगा। परन्तु दोनों समीकरणों में अव्यक्त के मान समान हैं इसलिये $\frac{१}{अ_१}$ यह एक अव्यक्त का मान हरात्मक समीकरण में भी होगा। इस युक्ति से स्पष्ट है कि हरात्मक समीकरण में एक एक जोड़े अव्यक्त के मान $अ_१, \frac{१}{अ_१}$ । $अ_२, \frac{१}{अ_२}$ । $अ_३, \frac{१}{अ_३}$ इस प्रकार के होंगे। इसलिये समीकरण की घात संख्या यदि विषम होगी तो हरात्मक समीकरण में अव्यक्त का एक मान अवश्य ऐसा होगा जसकी हरात्मा उसी के तुल्य होगी अर्थात् वह मान पहले प्रकार के हरात्मक समीकरण में -१ होगा और दूसरे प्रकार के हरात्मक समीकरण में $+१$ होगा। इसलिये पहिले प्रकार के हरात्मक समीकरण में $य+१$ का और दूसरे प्रकार के हरात्मक समीकरण में $य-१$ का निःशेष भाग लग जायगा, जिसके भाग देने से पहले प्रकार का हरात्मक समीकरण समघात का होगा। और यदि दूसरे प्रकार का हरात्मक समीकरण समघात का होगा तो उसका रूप $य^{न} - १ + प_१ य (य^{न-२} - १) + \cdots\cdots$

इस प्रकार का होगा जो $य^2 - १$ इससे भाग देने से निःशेष हो जायगा और लब्धि पहिले प्रकार का समघात का हरात्मक समीकरण होगी।

इस प्रकार से किसी हरात्मक समीकरण को पहिले प्रकार का समघात का हरात्मक समीकरण बना सकते हैं। लाघव से सर्वत्र हरात्मक समीकरण से पहिले प्रकार का समघात का हरात्मक समीकरण समझना चाहिए जिसका अन्त पद $+ १$ होगा।

दूसरे प्रकार का समघात का यदि हरात्मक समीकरण होगा तो गुणकों के सम्बन्ध से $प_म = - प_म$ एक ऐसी स्थिति होगी जहां $म = \frac{न}{२}$ परन्तु जो कुछ $प_म$ है सो तो हई है फिर वह अपने ही ऋणात्मक मान के तुल्य कैसे हो सकता है। इसलिये यदि $प_म$ शून्य के तुल्य न हो तो यह असंभव है। ऐसी स्थिति में हरात्मक समीकरण के बीच का पद न रहेगा।

८१—हरात्मक समीकरण को लघु करना अर्थात् छोटे घात का बनाना।

कल्पना करो कि

$$य^{२म} + प_१ य^{२म-१} + प_२ य^{२म-२} + \cdots\cdots + प_२ य^२ + प_१ य + १ = ०$$

यह एक हरात्मक समीकरण है। इसे छोटे घात का बनाना है।

ऊपर के समीकरण में $य^म$ का भाग देने से, दो दो समान गुणक के पदों को एकत्र करने से

$$य^म + \frac{१}{य^म} + प_१\left(य^{म-१} + \frac{१}{य^{म-१}}\right)$$

$$+ प_२\left(य^{म-२} + \frac{१}{य^{म-२}}\right) + \cdots\cdots = ० \text{ ऐसा हुआ ।}$$

इसमें यदि $य + \frac{१}{य} = र_१$, $य^२ + \frac{१}{य_२} = र_२$,

$$य_३ + \frac{१}{य_३} = र_३, \cdots\cdots य^त + \frac{१}{य^त} = र_त,$$

ऐसी कल्पना की जाय तो बीजगणित की साधारण रीति से

$$र^२_१ = \left(य + \frac{१}{य}\right)^२ = य^२ + \frac{१}{य^२} + २ = \left(य^२ + \frac{१}{य^२}\right) + २$$

$$\therefore र^२_१ = र_२ + २ \qquad \therefore र_२ = र^२_१ - १$$

$$र_३ = य^३ + \frac{१}{य^३} = \left(य + \frac{१}{य}\right)\left(य^२ + \frac{१}{य^२} - १\right)$$

$$= \left(य + \frac{१}{य}\right)\left\{\left(य^२ + \frac{१}{य^२}\right) - १\right\} = र_१\ (र_२ - १)$$

$$= र_१\ र_२ - र_१$$

इस प्रकार

$र_{त+१} = र_त\ र_१ - र_{त-१}$ ऐसा सिद्ध होगा ।

इस पर से त के स्थान में २,३,४, इत्यादि का उत्थापन देने से $र_१$ के फल स्वरूप में $र_३$, $र_४$ इत्यादि के मान आजायंगे जिन पर से पहिले की अपेक्षा अब आधे घात का अर्थात् म घात का समीकरण बनेगा । इस पर से जब $र_१$ का मान

आ जायगा तब $य + \frac{१}{य} = र_१$ इस पर से य के दो दो मान आ जायंगे।

उदाहरण—(१) $य^५ + य^४ + य^३ + य^२ + य + १ = ०$ इसमें य के मानों को बताओ।

यहां आदि पद से आगे और अन्त पद से पीछे तुल्यान्तरित पद के समान गुणक समान हैं इसलिये यह हरात्मक समीकरण हुआ। अन्त पद के धन रूप अर्थात् एक होने से यह समीकरण य + १ से निःशेष होगा। भाग देने से

$य^४ + य^२ + १ = ०$।

इसमें $य^२$ का भाग देकर समान गुणक के दो दो पदों को एकत्र करने से

$$य^२ + \frac{१}{य^२} + १ = र^२_१ - १ = ० \quad \therefore र_१ = \pm १$$

इसलिये $य + \frac{१}{य} = १,\ य + \frac{१}{य} = -१$

इन पर से य के मान $\frac{१ \pm \sqrt{-३}}{२}, \frac{-१ \pm \sqrt{-३}}{२}$।

(२) $य^{१०} - ३य^८ + ५य^६ - ५य^४ + ३य^२ - १ = ०$ इसमें य के मान क्या हैं।

यहां आदि पद से आगे और अन्त पद से पीछे तुल्यान्तरित पदों के गुणक समान और विरुद्ध चिन्ह के हैं इसलिये यह दूसरे प्रकार का हरात्मक समीकरण है। इसे $य^२ - १$ से लघु प्रकार (९वाँ प्रक्रम देखो) से भाग देने से

१	−३	+५	−५	+३	−१
	१	−२	३	−२	१
	−२	३	−२	१	०

इसलिये हरात्मक समीकरण

$$य^{८} - २य^{६} + ३य^{४} - २य^{२} + १ = ० \text{ यह हुआ} \cdots\cdots (१)$$

इसमें $य^{४}$ का भाग दे देने से और सम गुणक के दो दो पदों को एकत्र करने से

$$\left(य^{४} + \frac{१}{य^{४}}\right) - २\left(य^{२} + \frac{१}{य^{२}}\right) + ३ = ०$$

८१वें प्रक्रम से $त_{४}$ और $त_{२}$ के मान पर से

$त_{४} = र_{१}^{४} - ४र_{१}^{२} + २$, $त_{२} = र_{१}^{२} - २$ इनका उत्थापन देने से

$$र_{१}^{४} - ६र_{१}^{२} + ९ = (र_{१}^{२} - ३)^{२} = ०$$

इसलिये $र^{२}_{१} = ३ \;\therefore\; र_{१} = \pm\sqrt{३}$

और $य + \frac{१}{य} = +\sqrt{३}$, $य + \frac{१}{य} = -\sqrt{३}$

इन पर से य के मान $\frac{\sqrt{३} \pm \sqrt{-१}}{२}$, $\frac{-\sqrt{३} \pm \sqrt{-१}}{२}$

ये मान (१) समीकरण में दो दो बार आते हैं।

(३) $य^{६} + १ = ०$ इसके मूल बताओ।

यहां $य^{३}$ का भाग देने से $य^{३} + \frac{१}{य^{३}} = ०$

८१वें प्रक्रम से $र^{३}_{१} - ३र_{१} = ० \;\therefore\; र_{१} = ०$, $र_{१} = \pm\sqrt{३}$

इसलिये दिए हुए समीकरण में वर्गात्मक अव्यक्त खण्ड

$य^{२}+१=०,\ य^{२}\pm\sqrt{३}\,य+१=०$ ऐसे होंगे जिनके वश से ६ मूल आ जायंगे।

(४) $\dfrac{(१+य)^{५}}{१+य^{५}}+\dfrac{(१-य)^{५}}{१-य^{५}}=२\,अ$ इसमें य के मान बताओ।

यहां समीकरण का रूप छोटा करने से और ८१वें प्रक्रम की युक्ति से

$(१-अ)र_{१}^{४}+(७+३अ)र_{१}^{२}-(४+अ)=०$ ऐसा होगा।

इस पर से य के सब मानों का पता लग जायगा।

(५) $य^{२म}+प_{१}य^{२म-१}+प_{२}य^{२म-२}+\cdots\cdots+प_{म}य^{म}$

$+प\;{=}_{१}कय^{म-१}+प_{म-२}क^{२}य^{म-२}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

$+प_{२}क^{म-२}य^{२}+प_{१}क^{म-१}य+क^{म}=०$

इसका ऐसा रूपान्तर करो जिसमें एक हरात्मक समीकरण बने।

मान लो कि $य=ल\cdot क^{\frac{१}{२}}$ तो समीकरण का रूप

$ल^{२म}\cdot क^{म}+प_{१}ल^{२म-१}\cdot क^{\frac{२म-१}{२}}+\cdots\cdots\cdots+प_{म}ल^{म}क^{\frac{म}{२}}$

$+प_{म-१}ल^{म-१}क^{\frac{म+१}{२}}+\cdots\cdots$

$+\cdots\cdots\cdots+प_{१}लक^{\frac{२म-१}{२}}+क^{म}=०$

इसमें $\text{क}^{\text{म}}$ का भाग देने से

$$\text{ल}^{\text{२म}} + \text{प}_{\text{१}}\text{ल}^{\text{म}-\text{१}}\cdot\text{क}^{-\frac{\text{१}}{\text{२}}} + \cdots\cdots + \text{प}_{\text{म}}\text{ल}^{\text{म}}\cdot\text{क}^{-\frac{\text{म}}{\text{२}}}$$

$$+ \text{प}_{\text{म}-\text{१}}\text{ल}^{\text{म}-\text{१}}\cdot\text{क}^{\frac{-(\text{म}-\text{१})}{\text{२}}} + \cdots\cdots$$

$$+ \cdots\cdots + \text{प}_{\text{१}}\text{क}^{-\frac{\text{१}}{\text{२}}} + \text{१} = \text{०}$$

अब यह हरात्मक समीकरण हो गया क्योंकि आदि पद से आगे और अन्त पद से पीछे तुल्यान्तरित पदों के गुणक समान हैं।

इस प्रकार से दिए हुए समीकरण से जहां हरात्मक समीकरण बन जाता हो तहां अव्यक्त के मान निकल सकते हैं।

अभ्यास के लिये प्रश्न

१। $\text{य}^{\text{५}} - \text{१} = \text{०}$ इसमें य के मान बताओ।

२। $(\text{१} + \text{य})^{\text{४}} = \text{अ}(\text{१} + \text{य}^{\text{४}})$ इसके मूल बताओ।

३। $(\text{१} + \text{य})^{\text{५}} = \text{अ}(\text{१} + \text{य}^{\text{५}})$ इसमें य के मान बताओ।

४। $\text{२य}^{\text{६}} + \text{य}^{\text{५}} - \text{१३य}^{\text{४}} + \text{१३य}^{\text{२}} - \text{य} - \text{२} = \text{०}$ इसमें य के मान बताओ। उ० $\text{२}, \frac{\text{१}}{\text{२}}, \frac{\text{१}}{\text{२}}(-\text{३} \pm \sqrt{\text{५}}), \text{१}, -\text{१}$।

५। $\text{य}^{\text{१०}} - \text{१} = \text{०}$ इसमें य के मान बताओ।

६। $\text{य}^{\text{४}} + \text{पय}^{\text{२}} + \text{१} = \text{०}$ इसमें य के मान बताओ।

७। $\text{य}^{\text{न}} + \text{प}_{\text{१}}\text{य}^{\text{न}-\text{१}} + \text{प}_{\text{२}}\text{य}^{\text{न}-\text{२}} + \cdots\cdots + \text{प}_{\text{२}}\text{य}^{\text{२}} + \text{प}_{\text{१}}\text{य} + \text{१} = \text{०}$ इसमें य के मान यदि अ, क, ख, ग, घ, इत्यादि हों तो सिद्ध करो कि

$$\frac{अ^२}{क^२} + \frac{अ^२}{ख^२} + \cdots + \frac{क^२}{अ^२} + \frac{क^२}{ख^२} + \cdots\cdots + \frac{ख^२}{अ_२} + \frac{ख^२}{क_२} + \cdots\cdots$$

$$= (प_१^२ - २प_२)^२ - न$$

८। $य^{२न} - प_१ य^{२न-१} + प_२ य^{२न-२} - प_३ य^{२न-३} + \cdots = ०$
इस प्रकार के हरात्मक समीकरण में जहां एक धन, एक ऋण, इस प्रकार से पद हैं वहां सिद्ध करो कि यदि $\frac{प_न}{न} < २$ तो सब अव्यक्त के मान संभाव्य नहीं हो सकते।

९। $य^७ - २य^५ + य^४ + य^३ - २य^२ + १ = ०$ इसके मूल बताओ।

१०। $य^७ + २य^६ - ८य^५ - ७य^४ - ७य^३ - ८य^२ + २य + १ = ०$ इसमें य के मान बताओ।

११। $य^८ + २य^७ + ३य^६ + २य^५ - २य^३ - ३य^२ - १ = ०$ इस में य के मान बताओ।

६—द्वियुक्पद समीकरण

८२—जो समीकरण $य^न - आ = ०$ इस प्रकार का होता है उसे द्वियुक् पद समीकरण कहते हैं। इसमें आ यह व्यक्त संख्या है।

इस समीकरण के सब मूल भिन्न भिन्न होंगे क्योंकि $फ(य) = य^न - आ = ०$ तो $फ'(य) = न य^{न-१} = ०$। अब य का कोई ऐसा मान नहीं जो दोनों समीकरणों को ठीक रखे (५३वां प्रक्रम देखो)

८३—यदि $य^न - आ = ०$ तो बीजगणित की साधारण रीति से $य = \sqrt[न]{आ}$ अर्थात् आ के न घात मूल के तुल्य य का एक मान आता है। परन्तु यह न घात का समीकरण है इसलिये २४वें प्रक्रम से य के भिन्न भिन्न न मान आवेंगे। इसलिये कह सकते हैं कि कोई बीजात्मक राशि के न घात मूल भिन्न भिन्न न आवेंगे।

किसी बीजात्मक राशि के कोई एक न घात मूल से एक के अर्थात् रूप के न घात मूलों को क्रम से गुण देने से उस राशि के सब न घात मूलों के मान हो जायंगे।

कल्पना करो कि आ राशि के न घात मूल का एक मान अ है अर्थात् $अ^न = आ$ तो य के स्थान में अ र का उत्थापन देने से $य^न - आ = अ^न र^न - आ = आ र^न - आ = ०$।

$\therefore र^न - १ = ० \quad \therefore र = \sqrt[न]{१}$।

इसलिये १ के न घात मूल के तुल्य र हुआ और $य = अ \cdot र = अ\sqrt[न]{१}$। परन्तु $य = \sqrt[न]{आ}$ इसलिये $\sqrt[न]{आ}$

$$= अ\sqrt[न]{१}।$$

$य^न - आ = ०$ वा $य^न + अ = ०$ इस प्रकार के दिए हुए समीकरण पर से $र^न - १ = ०$ वा $र^न + १ = ०$ इस प्रकार का समीकरण बन जाता है जिससे १ के न घात मूलों के मान

जान कर उन्हें क्रम से श्र के न घात मूल के एक मान से जा व्यक्तगणित वा द्वियुक्पद सिद्धान्त से आ जायगा, गुण देने से य के सब मान आ जायंगे।

अब +१ वा −१ के न घात मूल के सब मान कैसे निकलेंगे इसके लिये आगे कुछ सिद्धान्त दिखलाते हैं।

८४—यदि $य^न - १ = ०$ इसमें य का एक मान $अ_१$ हो तो $अ^म_१$ यह भी य का एक मान होगा जहां म कोई धन वा ऋण अभिन्नाङ्क है। क्योंकि $(अ^म_१)^न = (अ^न_१)^म = १^म = १$।

८५—यदि $य^न + १ = ०$ इसमें यदि य का एक मान $अ_१$ हो तो $अ^म_१$ भी य का एक मान होगा जहां म कोई धन वा ऋण विषम अभिन्नाङ्क है। क्योंकि

$$(अ^म_१)^न = (अ^न_१)^म = (-१)^म = -१।$$

८६—यदि म और न परस्पर दृढ़ हो तो $य^म - १ = ०$ और $य^न - १ = ०$ इन दोनों समीकरणों में एक को छोड़ य का ऐसा कोई मान न होगा जो उभयनिष्ठ हो।

कल्पना करो कि $प_१$ और $प_२$ दो ऐसे अभिन्नाङ्क हैं जिनके वश से

$$प_१ म - प_२ न = \pm १$$

ऐसा समीकरण बनता है। ($प_१$ और $प_२$ सर्वदा $\frac{म}{न}$ इसके चिततरूप से व्यक्त हो जाते हैं; इसके लिये मेरा संख्या

भास्कराचार्य का बीजगणित देखो) और मान लो कि य का एक मान एक को छोड़ $अ_१$ है जो दोनों समीकरणों को ठीक रखता है तो

$$अ^{म}_{१} = १ \quad \therefore \quad अ_{१}^{प_१ म} = १ \cdots\cdots\cdots\cdots (१)$$

$$\text{और } अ^{न}_{१} = १ \quad \therefore \quad अ_{१}^{प_२ न} = १ \cdots\cdots\cdots\cdots (२)$$

(१) में (२) का भाग देने से

$$अ_{१}^{प_१ म - प_२ न} = अ_{१}^{\pm १} = १$$

इसलिये $अ_१ = १$ इससे ऊपर का सिद्धान्त सिद्ध हुआ।

८७—$य^{न} - १ = ०$ इसमें यदि न दृढ़ संख्या हो और इस समीकरण का एक मूल रूप छोड़ कर $अ_१$ हो तो सब मूल क्रम से

$$अ_{१},\ अ^{२}_{१},\ अ^{३}_{१}, \cdots\cdots अ^{त}_{१}, \cdots\cdots अ^{न}_{१} \text{ ये होंगे।}$$

८४वें प्रक्रम में सिद्ध है कि $अ_{१}, अ^{२}_{१}, अ^{३}_{१}, \cdots\cdots अ^{न}_{१}$ ये सब मूल हैं। इसलिये यहां पर इतना ही दिखला देना है कि ये सब परस्पर भिन्न हैं अर्थात् इनमें कोई एक दूसरे के समान नहीं हैं। यदि हैं तो मान लो कि $अ^{त}_{१}$ और $अ^{द}$ दोनों तुल्य हैं जहां त और द दोनों न से अल्प हैं। इसलिये त—द भी न से अल्प होगा।

$$\text{अब } अ^{त}_{१} = अ^{द}_{१} \quad \therefore \quad अ^{त-द}_{१} = १ \text{ और } अ^{न}_{१} = १$$

इसलिये $य^{त-द} - १ = ०$ और $य^{न} - १ = ०$ इन दोनों समीकरणों में य का एक मान रूप के अतिरिक्त $अ_१$ उभयनिष्ठ हुआ जो न और त—द के परस्पर दृढ़ होने से ८६वें प्रक्रम से असम्भव है। इसलिये

$अ_१, अ^२_१, अ^३_१, \cdots\cdots अ^न_१$ ये सब आपस में समान नहीं हैं यह सिद्ध हुआ। तब स्पष्ट हो गया कि वे सब $य^न - १ = ०$ इसके मूल हैं।

८८—यदि न दृढ़ संख्या न हो और $य^न - १ = ०$ इसका रूपातिरिक्त एक मूल $अ_१$ हो तब यह नहीं कह सकते कि $अ_१, अ^२_१, अ^३_१, \cdots\cdots अ^न_१$ ये भी क्रम से सब मूल होंगे।

क्योंकि यदि $न = प \cdot ल$, जहां प दृढ़ संख्या है और $य^प - १ = ०$ इसका एक मूल $अ_१$ हो तो यही एक मूल $य^न - १ = ०$ इसका भी होगा क्योंकि $अ^न_१ = अ^{प \cdot ल}_१ = (अ^प_१)^ल = १$ और ८७वें प्रक्रम की युक्ति से

$अ_१, अ^२_१, अ^३_१ \cdots\cdots\cdots अ^प_१$ ये सब भिन्न भिन्न होंगे परन्तु आगे आगे बढ़ाने से $अ^{प+१}_१ = अ^प_१ \times अ_१ = अ_१$ यह अव्यक्त के पहले मान के समान हो गया। इसी प्रकार य के आगे के सब मान अब पिछले मानों के समान होंगे।

इसलिये $अ_१, अ_१^२, अ_१^३, \cdots\cdots अ_१^न$ ये सब $य^न - १ = ०$ इसके सब मूल नहीं हो सकते क्योंकि इसके जितने मूल हैं उनमें कोई आपस में समान नहीं है (८२वां प्र० देखो)।

८९—यदि $न = क \cdot ख \cdot ग \cdot घ \cdots\cdots$ जहां ये सब दृढ़ संख्या हैं तो $य^क - १ = ०, य^ख - १ = ०, य^ग - १ = ०, \cdots\cdots$ इनके जो मूल होंगे वे सब $य^न - १ = ०$ इसके भी मूल होंगे।

क्योंकि यदि $य^क - १ = ०$ इसके कोई एक मूल को $अ_१$ कहो तो $अ^क_१ = १$ जिससे $अ^न_१ = (अ^क_१)^{ख \cdot ग \cdots} = १$ अर्थात् $अ^न_१ - १ = ०$

इसी प्रकार और $य^{ख} - १ = ०$, $य^{ग} - १ = ०$ ...... समीकरणों के मूल से भी सिद्ध कर सकते हो।

९०—यदि न = क·ख·ग ...... जहां क·ख·ग ...... इत्यादि सब दृढ़ संख्या हैं तो $य^{न} - १ = ०$ इसके मूल $(१ + अ_{१} + अ_{१}^{२} + अ_{१}^{३} + \cdots\cdots + अ_{१}^{क-१}) (१ + अ_{२} + अ_{२}^{२} + अ_{२}^{३} + \cdots + अ_{२}^{ख-१})$ $(१ + अ_{३} + अ_{३}^{२} + \cdots\cdots + अ_{३}^{ग-१})$ इनके गुणनफल में जो आदि से न पद होंगे उन प्रत्येक पद के समान होंगे। जहां $अ_{१}$, $य^{क} - १ = ०$ इसका $अ_{२}$, $य^{ख} - १ = ०$ इसका $अ_{३}$, $य^{ग} - १ = ०$ इसका ...... एक मूल है।

यहां क, ख, ग, तीन दृढ़ संख्या के घात के तुल्य न है यह मान कर उपपत्ति दिखलाई जाती है।

ऊपर के गुणन फल में मान लो कि कोई पद $अ_{१}^{प}\, अ_{२}^{ब}\, अ_{३}^{म}$ है तो स्पष्ट है कि यह $य^{न} - १ = ०$ इसका एक मूल है क्योंकि $अ_{१}^{प\cdot न} = १$, $अ_{२}^{ब\cdot न} = १$, $अ_{३}^{म\cdot न} = १$

इसलिये $(अ_{१}^{प}\; अ_{२}^{ब}\; अ_{३}^{म})^{न} = १$

अब इतना और दिखला देना है कि ऊपर के गुणन फल में कोई दो पद आपस में तुल्य नहीं हैं। यदि कहा जाय कि तुल्य हैं तो मान लो कि

$अ_{१}^{प}\; अ_{२}^{ब}\; अ_{३}^{म} = अ_{१}^{प'}\; अ_{२}^{ब'}\; अ_{३}^{म'}$ तब $अ_{१}^{प-प'} = अ_{२}^{ब'-ब}\; अ_{३}^{म'-म}$ इस समीकरण का बायां पक्ष $य^{क} - १ = ०$ इसका एक मूल है और दहना पक्ष

$य^{ख\cdot ग} - १ = ०$ इसका एक मूल है। इसलिये $य^{क} - १ = ०$, $य^{ख\cdot ग} - १ = ०$ इन दोनों में एक मूल उभयनिष्ठ हुआ। परन्तु क और ख·ग परस्पर दृढ़ हैं इसलिये ८९वें प्रक्रम से यह बात

असंभव है। इसलिये ऊपर के गुणन फल में कोई दो पद परस्पर तुल्य नहीं हैं।

९१—इसी प्रकार यदि $न = क^{प} \cdot ख^{ब} \cdot ग^{म}$ जहां क, ख, ग दृढ़ हैं तो दिखला सकते हो कि $अ_{१} अ_{२} अ_{३}$ इस प्रकार के जो न गुणन फल होंगे वे $य^{न} - १ = ०$ इसके मूल होंगे जहां $अ_{१}$, $य^{क^{प}} - १ = ०$ इसका $अ_{२}$, $य^{ख^{ब}} - १ = ०$ इसका $अ_{३}$, $य^{ग^{म}} - १ = ०$ इसका एक मूल है।

इसकी उपपत्ति भी पिछले ही प्रक्रम की युक्ति ऐसी है क्योंकि $क^{प}$, $ख^{ब}$, $ग^{म}$ इनमें प्रत्येक से न निःशेष होता है इसलिये $अ_{१}^{न} = १$, $अ_{२}^{न} = १$, $अ_{३}^{न} = १$ और ९०वें प्रक्रम की युक्ति से दिखला सकते हो कि $अ_{१}$ $अ_{२}$ $अ_{३}$ इस प्रकार के मूलों के कोई दो गुणनफल समान नहीं हैं।

इसी प्रकार, तीन से अधिक दृढ़ संख्याओं को भिन्न भिन्न घात के गुणन फल के तुल्य 'न' हो तो भी सब बात सिद्ध कर सकते हो।

९२—$य^{न} - १ = ०$ इसमें य के न मान आवेंगे और यदि $न = प^{अ}$ जहां प कोई दृढ़ संख्या है और $य^{प^{अ-१}} - १ = ०$ इसमें $प^{अ-१}$ इतने य के मान आवेंगे जो सब ८९वें प्रक्रम से $य^{न} - १ = ०$ इसमें भी य के मान होंगे। इसलिये $य^{प^{अ-१}} - १ = ०$ इसके जितने मूल हैं उनसे नये $प^{अ} - प^{अ-१} = प^{अ}\left(१ - \frac{१}{प}\right)$ इतने मूल $य^{न} - १ = ०$ इसके होंगे।

इसी प्रकार $य^{ब^{क-१}} - १ = ०$ इसके मूल से $य^{ब^{क}} - १ = ०$ इसके नये मूल $ब^{क}\left(१ - \frac{१}{ब}\right)$ इतने होंगे।

अब यदि $न = प^{अ} ब^{क}$ जहां प और ब परस्पर दृढ़ हैं और ऊपर के नये मूलों में पहले समीकरण का एक मूल $अ_1$, दूसरे का एक मूल $अ_2$, कल्पना करो तो जितने मूल $य^{प^{अ}} - १ = ०$, और $य^{ब^{क}} - १ = ०$ इनके होंगे उनसे नया एक मूल $अ_1 अ_2$ के तुल्य $य^{न} - १ = ०$ इसका होगा।

यदि कहो कि $अ_1 अ_2$ यह नया मूल $य^{न} - १ = ०$ इसका न होगा तो कल्पना करो कि कोई 'न' से अल्प म घात के समीकरण का यह मूल होगा तो $(अ_1 अ_2)^{म} = १$

$$\therefore अ_1^{म} = अ_2^{-म}$$

परन्तु $अ_1^{म}$, $य^{प^{अ}} - १ = ०$ इसका एक मूल है और $अ_2^{-म}$, $य^{ब^{क}} - १ = ०$ इसका एक मूल है। इसलिये दोनों समीकरण का एक ही मूल हुआ जो $प^{अ}$ और $ब^{क}$ के परस्पर दृढ़ होने से ८९वें प्रक्रम से असंभव है। इसलिये न से म छोटा नहीं हो सकता। इसलिये $य^{न} - १ = ०$ इसका $अ_1 अ_2$ यह एक नया मूल होगा। इस प्रकार से दो दो मूलों को लेने से

$$प^{अ} \left(१ - \frac{१}{प}\right) ब^{क} \left(१ - \frac{१}{ब}\right) = न \left(१ - \frac{१}{प}\right) \left(१ - \frac{१}{ब}\right)$$

इतने भेद होंगे। इसलिये $य^{न} - १ = ०$ इसके $न \left(१ - \frac{१}{प}\right) \times \left(१ - \frac{१}{ब}\right)$ इतने मूल

$य^{प^{अ}} - १ = ०$ और $य^{ब^{क}} - १ = ०$ इसके मूलों से नये आवेंगे।

विशिष्ट मूल—इस प्रकार से न घात द्वियुक्पद समीकरण में न के अपवर्त्तनाङ्क रूप घात के समीकरण के मूलों से जो नये मूल आते हैं उन्हें विशिष्ट मूल कहते हैं।

९३—$य^न - १ = ०$ इसका एक विशिष्ट मूल यदि $अ_१$ कहें तो सब मूल क्रम से

$$अ_१, अ_१^२, अ_१^३, अ_१^४, \cdots\cdots\cdots अ_१^न \text{ ये होंगे।}$$

यहां स्पष्ट है कि $अ_१^न = १$ क्योंकि ८४वें प्रक्रम से ये सब मूल होंगे। इनमें यदि कोई दो तुल्य हों तो मान लो कि $अ_१^त = अ_१^द \;\therefore\; अ^{त-द} = १$ परन्तु त—द यह न से अल्प है इसलिये $अ_१$ विशिष्ट मूल नहीं हो सकता।

ऊपर के मूलों को $१, अ_१, अ_१^२, अ_१^३ \cdots\cdots अ_१^{न-१}$ ऐसे भी लिख सकते हैं। इस श्रेढी में यदि एक पद $अ_१^त$ यह चुन लें जहां त यह न से छोटा और दृढ़ है तो

$$अ_१^त, अ_१^{२त}, अ_१^{३त}, \cdots\cdots\cdots अ_१^{त(न-१)}, अ_१^{नत} (= १)$$

ये सब भी परस्पर दृढ़ भिन्न होंगे क्योंकि त, २त, इत्यादि घाताङ्कों में न का भाग देने से शेष भिन्न भिन्न ०, १, २, ३, ⋯ न − १ ये आते हैं। और ऊपर लिखे मूलों में से $अ_१^त$ से आगे त + १ दूरी पर जो जो पद हैं उनके मूल होंगे। अन्तिम पद के बाद आदि पद से गणना कर त + १ का विचार करो। इसलिये ये भी वे ही सब मूल हैं केवल ऊपर के क्रम की अपेक्षा भिन्न क्रम से स्थित हैं।

९४—$य^न - १ = ०$ इसके कोई एक विशिष्ट मूल जानने के लिये चाहिए कि न का दृढ़ गुण्य गुणक रूप खण्ड कर उन गुण्य गुणक घात के जो पृथक् पृथक् द्वियुकपद समीकरण होंगे उनमें जो समान अव्यक्तात्मक गुण्य गुणक रूप खण्ड हों उनमें से एक एक और भिन्न अव्यक्तात्मक सब खण्डों के घात

से दिए हुए समीकरण में भाग देकर लब्धि को शून्य के तुल्य करने से विशिष्ट मूल को लाना चाहिए। अथवा जो पृथक् पृथक् द्वियुक्पद समीकरण हैं उनके लघुत्तमापवर्त्य से भाग देकर, लब्धि को शून्य कर विशिष्ट मूल ले आवो।

जैसे $य^६ - १ = ०$ इसके मूलों को जानना है।

यहां $न = ६ = २ \times ३$ इसलिये $य^२ - १ = ०$, $य^३ - १ = ०$ इनके सब मूल $य^६ - १ = ०$ इसके भी मूल होंगे (८६ प्र० देखो)

परन्तु $य^२ - १ = (य + १)(य - १)$ और $य^३ - १ = (य - १) \times (य^२ + य + १)$। दोनों में $य - १$ यह खण्ड आया। यह खण्ड और दोनों के भिन्न भिन्न खण्डों के घात

$$= (य + १)(य - १)(य^२ + य + १)$$
$$= (य + १)(य^३ - १)$$

इससे $य^६ - १$ इसमें भाग देने से और लब्धि को शून्य के समान करने से

$$\frac{य^६ - १}{(य + १)(य^३ - १)} = \frac{य^३ + १}{य + १} = य^२ - य + १ = ० \text{ ऐसा हुआ}$$

इस पर से विशिष्ट मूल

$$\frac{१ + \sqrt{-३}}{२} = अ_१ \text{ वा } \frac{१ - \sqrt{-३}}{२} = अ_२ \text{।}$$

और दिए हुए समीकरण के मूल

$$अ_१, अ_१^२, अ_१^३, अ_१^४, अ_१^५, अ_१^६ (= १)$$

यहां

$$अ_१ = \frac{१ + \sqrt{-३}}{२}, अ_१^२ = \frac{-१ + \sqrt{-३}}{२}$$

$$अ^३_१ = अ_१ \cdot अ^२_१ = \frac{(१+\sqrt{-३})(-१+\sqrt{-३})}{२\times२} = -१$$

$$अ^४_१ = अ^३_१ \cdot अ_१ = -\frac{१+\sqrt{-३}}{२}$$

$$अ^५_१ = अ^४_१ \cdot अ_१ = \frac{(-१-\sqrt{-३})(१+\sqrt{-३})}{२\times२} = \frac{१-\sqrt{-३}}{२}$$

$$अ^६_१ = अ^५_१ \cdot अ_१ = \frac{(१-\sqrt{-३})(१+\sqrt{-३})}{२\times२} = १$$

इसलिये क्रम से मूल

$$१, \frac{१+\sqrt{-३}}{२}, \frac{-१+\sqrt{-३}}{२}, -१, -\frac{१+\sqrt{-३}}{२}, \frac{१-\sqrt{-३}}{२},$$

इसमें अन्त का मूल, $अ_२$ के समान है। इस पर से यदि ८३वें प्रक्रम से मूल निकालो तो

$अ_२, अ^२_२, अ^३_२, अ^४_२, अ^५_२, अ^६_२$ ये होंगे।

परन्तु

$$अ_२ = \frac{१-\sqrt{-३}}{२}, \; अ^२_२ = -\frac{१+\sqrt{-३}}{२}$$

$$अ^३_२ = अ^२_२ \cdot अ_२ = \frac{(१-\sqrt{-३})(-१-\sqrt{-३})}{२\times२} = -१$$

$$अ^४_२ = अ^३_२ \cdot अ_२ = -\frac{१-\sqrt{-३}}{२}$$

$$अ_२^५ = अ_२^४ \cdot अ_२ = \frac{(१ - \sqrt{-३})(-१ + \sqrt{-३})}{२ \times २} = \frac{१ + \sqrt{-३}}{२}$$

$$अ_२^६ = अ_२^५ \cdot अ_२ = \frac{(१ - \sqrt{-३})(१ + \sqrt{३})}{२ \times २} = १$$

क्रम से मूल

$$\frac{१ - \sqrt{-३}}{२},\ -\frac{१ + \sqrt{-३}}{२},\ -१,\ -\frac{१ - \sqrt{-३}}{२},$$

$$\frac{१ + \sqrt{-३}}{२},\ १$$

यह मूल श्रेढी $अ_२$ से बनी है और $अ_२ = अ_१^५$। इसलिये ९३वें प्रक्रम से $त = ५$ और $त + १ = ६$, इसलिये पहली मूल श्रेढी के $अ_१^५$ पद से छ पद जो हैं वे इस मूल श्रेढी के क्रम से दूसरा, तीसरा इत्यादि पद हैं।

(२) $य^{१२} - १ = ०$ इसके विशिष्ट मूलों को जानना है।

यहां $न = १२$ जो २ और ३ दृढाङ्क से निःशेष होता है जैसे $\frac{१२}{३} = ४$, $\frac{१२}{२} = ६$, इसलिये $य^४ - १ = ०$ और $य^६ - १ = ०$ इसके जितने मूल होंगे वे सब $य^{१२} - १ = ०$ इसके भी मूल होंगे। इसलिये $य^४ - १$ और $य^६ - १$ इसके लघुत्तमापवर्त्य $(य^२ + १) \times (य^६ - १)$ इससे $य^{१२} - १$ इसमें भाग देने से $\frac{य^{१२} - १}{(य^२ + १)(य^६ - १)}$ $= य^४ - य^२ + १$ .... इस लब्धि को शून्य के तुल्य करने से

$$य^४ - य^२ + १ = ० \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (१)$$

यह हरात्मक समीकरण हुआ।

(१) में $\text{य}^{२}$ का भाग देने से और $\text{य} + \frac{१}{\text{य}} = \text{र}_{१}$ मानने से ८१वें प्रक्रम से

$$\left(\text{य}^{२} + \frac{१}{\text{य}^{२}}\right) - १ = \text{र}_{१}^{२} - ३ = ०$$

$$\therefore \quad \text{र}_{१} = \pm\sqrt{३} = \text{य} + \frac{१}{\text{य}}$$

$$\therefore \quad \text{य}^{२} + १ = \pm \text{य}\sqrt{३}$$

$$\text{वा} \quad \text{य}^{२} \mp \text{य}\sqrt{३} + १ = ०$$

$$\therefore \text{य} = \frac{\sqrt{३} \pm \sqrt{-१}}{२} \text{ वा } \text{य} = \frac{-\sqrt{३} \pm \sqrt{-१}}{२}$$

$\text{य}^{१२} - १ = ०$ इसके ये चार विशिष्ट मूल हुए।

इन चारों को क्रम से $\text{अ}, \frac{१}{\text{अ}}, \text{अ}_{१}, \frac{१}{\text{अ}_{१}}$ कहो तो

$$\text{अ} + \frac{१}{\text{अ}} + \text{अ}_{१} + \frac{१}{\text{अ}_{१}} = (\text{अ} + \text{अ}_{१})\left(१ + \frac{१}{\text{अ}\,\text{अ}_{१}}\right) = ०$$

$$\therefore \text{अ}\,\text{अ}_{१} = -१ ।$$

$\text{य}^{१२} - १ = (\text{य}^{६} + १)(\text{य}^{६} - १) = ०$ । $\text{य}^{६} - १ = ०$ इसके जो मूल हैं उनके नये अ और $\text{अ}_{१}$ हैं इसलिये $\text{य}^{६} + १ = ०$ इस समीकरण के अ और $\text{अ}_{१}$ मूल हैं। तब $\text{अ}^{६} = -१$ और $\text{अ}^{५} = -\frac{१}{\text{अ}} = \text{अ}_{१}$ । इसलिये

$\text{अ}, \text{अ}_{१}, \frac{१}{\text{अ}}, \frac{१}{\text{अ}_{१}}$, इन मूलों को $\text{अ}, \text{अ}^{५}, \text{अ}^{७}, \text{अ}^{११}$ इस श्रेढी से प्रकट कर सकते हैं क्योंकि $\text{अ}^{१२} = १$ और इस श्रेढी में

एकादि पदों के पहले स्थान में क्रम से $अ$, $अ^{५}$, $अ^{७}$, $अ^{११}$ रख कर, क्रम से उनका ५,७,११ घात करने से और १२ से ऊपर के घातों को १२ से तष्ट करने से

$अ$, $अ^{५}$, $अ^{७}$, $अ^{११}$
$अ^{५}$, $अ$ $अ^{११}$ $अ^{७}$
$अ^{७}$, $अ^{११}$ $अ$ $अ^{५}$
$अ^{११}$, $अ^{७}$ $अ^{५}$ $अ$ ऐसा हुआ।

देखो यहाँ हर एक ऊर्ध्वाधर और तिर्यक् पंक्तियों में वे ही मूल हैं केवल क्रम में भेद है।

$अ$, $अ^{५}$, $अ^{७}$, $अ^{११}$ इन विशिष्ट मूलों में घात की संख्यायें ५, ७, ११ ये सब १२ से अल्प और दृढ़ हैं। इसलिये ९३वें प्रक्रम से कोई को लेकर उसके एक, द्वि, इत्यादि सम घात से $य^{१२} - १ = ०$ इसके मूल आ जायँगे। इन चारो पर से मूल जो घात १२ से ऊपर हैं उन्हें १२ से तष्ट कर देने से

$अ$ $अ^{२}$ $अ^{३}$ $अ^{४}$ $अ^{५}$ $अ^{६}$ $अ^{७}$ $अ^{८}$ $अ^{९}$ $अ^{१०}$ $अ^{११}$ १
$अ^{५}$ $अ^{१०}$ $अ^{३}$ $अ^{८}$ $अ$ $अ^{६}$ $अ^{११}$ $अ^{४}$ $अ^{९}$ $अ^{२}$ $अ^{७}$ १
$अ^{७}$ $अ^{२}$ $अ^{९}$ $अ^{४}$ $अ^{११}$ $अ^{६}$ $अ$ $अ^{८}$ $अ^{३}$ $अ^{१०}$ $अ^{५}$ १
$अ^{११}$ $अ^{१०}$ $अ^{९}$ $अ^{८}$ $अ^{७}$ $अ^{६}$ $अ^{५}$ $अ^{४}$ $अ^{३}$ $अ^{२}$ $अ^{१}$ १

ये क्रम भेद से सब तिर्यक् पंक्तियों में एक ही हैं।

इस प्रकार से जहाँ जैसा सम्भव हो तहाँ तैसे दिए हुए समीकरण के ऐसे उससे बड़े से बड़े ऐसे लघु घात के समीकरण बनाने चाहिए जिनमें वे लघु घाताङ्क से दिए हुए समीकरण की घात संख्या निःशेष हो जाय। फिर इन समीकरणों के लघुत्तमापवर्त्य से दिए हुए समीकरण में भाग देकर लब्धि को शून्य के समान कर विशिष्ट मूलों का पता लगाना चाहिए।

९५—$य^{न} - १ = ०$ इस समीकरण में जहाँ न की संख्या दो से अधिक है, ऊपर के प्रक्रमों से स्पष्ट है कि १ को छोड़ इसके सब मूल असम्भव हैं। इसलिये ऐसे समीकरण का विशिष्ट मूल भी असम्भव संख्या होगा।

त्रिकोणमिति में डिमाइवर के सिद्धान्त से स्पष्ट है कि यदि त यह धन अभिन्नाङ्क हो तो

$$\left(\text{कोज्या } \frac{२ त \pi}{न} + \sqrt{-१} \text{ ज्या } \frac{२ त \pi}{न} \right)^{न} = १$$

इसलिये $य^{न} - १ = ०$ इसका एक मूल

$$\text{कोज्या } \frac{२ त \pi}{न} + \sqrt{-१} \text{ ज्या } \frac{२ त \pi}{न} = अ_{१} \text{ यह अवश्य होगा}$$

यदि त को न से दृढ़ मानो तो कह सकते हो कि $य^{न} - १ = ०$ इसका एक विशिष्ट मूल $अ_{१}$ होगा और तब ९३वें प्रक्रम से

$अ_{१}, अ_{१}^{२}, अ_{१}^{३}, \ldots\ldots अ_{१}^{न-१}$

ये सब दिए हुए समीकरण के मूल होंगे जो परस्पर भिन्न हैं। यदि कोई कहे कि इनमें कोई दो समान हैं तो मान लो कि $अ_{१}^{थ} = अ_{१}^{द}$ जहाँ थ और द दोनों धन और न से अल्प हैं

डिमाइवर के सिद्धान्त से

$$अ_{१}^{थ} = \text{कोज्या } \frac{२ थ त \pi}{न} + \sqrt{-१} \text{ ज्या } \frac{२ थ त \pi}{न}$$

$$\text{और } अ_{१}^{द} = \text{कोज्या } \frac{२ द त \pi}{न} + \sqrt{-१} \text{ ज्या } \frac{२ द त \pi}{न}$$

यदि ये दोनों तुल्य होंगे तो अवश्य $\frac{२ थ त \pi}{न}$ और $\frac{२ द त \pi}{न}$ ये दोनों तुल्य होंगे अथवा दोनों का अन्तर चार समकोण का अपवर्त्य होगा।

इसलिये $\frac{थ \backsim द}{न}$ यह एक अभिन्नाङ्क होगा। परन्तु त वह न से दृढ़ है, इसलिये $थ \backsim द$ यह न से निःशेष होगा। परन्तु थ और द ये न से छोटे कल्पना किए गए हैं, इसलिये न से इनके अन्तर का निःशेष होना असम्भव है। तब $अ^थ_१$, $अ^द_१$ ये दोनों परस्पर तुल्य नहीं हो सकते। इसलिये ऊपर के सब मूल अवश्य परस्पर भिन्न हैं।

९६—$य^न - १ = ०$ और $य^न + १ = ०$ इनके मूलों के जानने के लिये नीचे लिखी साधारण रीति को इस तरह दिखला सकते हो

यदि $न = २^त$ तो $य^न - १ = ०$ इसका एक मूल तो स्पष्ट है कि $+१$ होगा और सब मूल वार बार -१ के मूल लेने से जो १५वें प्रक्रम से असम्भव होंगे व्यक्त हो जायँगे। यदि $न = प \cdot म$, जहाँ $प = २^त$ तो

$$य^न = य^{पम} = (य^{२त})^म = र^म, \text{ यदि } य^प = र \text{ तो}$$

$य^न - १ = ०$ और $य^न + १ = ०$ इन दोनों के मूल क्रम से $र^म - १ = ०$ और $र^म + १ = ०$ इनके मूल होंगे। इनमें यदि र के मान व्यक्त हो जायँ तो उनके बार बार त वार मूल लेने से य के मान भी व्यक्त हो जायँगे।

९७—$य^न - १ = ०$ इसमें मान लो कि न विषम $२म + १$ के तुल्य है तो डिकार्टिस् की युक्ति से $य^{२म+१} - १ = ०$ इसका ऋण संभव मूल न होगा और धन संभाव्य मूल $न + १$ होगा। यदि $+१$ से भिन्न कोई और धन संख्या का उत्थापन य में दो तो स्पष्ट है कि $य^{२म+१}$ यह १ के समान न होगा। इसलिये इस समीकरण का $+१$ के अतिरिक्त कोई सम्भव मूल न होगा।

$य^{२म+१} - १ = ०$ इसमें $य - १$ का भाग देने से लब्धि

$$य^{२म} + य^{२म-१} + \cdots\cdots + य^{२} + य + १ = ०$$

यह हरात्मक समीकरण का रूप है, इसलिये हरात्मक समीकरण के तोड़ने की युक्ति से इस पर से एक म घात का समीकरण बन जायगा।

९८—$य^{न} - १ = ०$ इसमें यदि $न = २म$ तो इसके दो ही सम्भाव्य मूल $+१$ और -१ आवेंगे। इसलिये $(य + १) \times (य - १) = य^{२} - १$ इसका भाग समीकरण में देने से एक नया हरात्मक समीकरण

$य^{२म-२} + {}^{२म-४} + \cdots\cdots + य^{२} + १ = ०$ ऐसा होगा।

इस पर से हरात्मक समीकरण के तोड़ने की युक्ति से $म - १$ घात का समीकरण बन जायगा।

$य^{२म} - १ = ०$ इसे $(य^{म} - १)(य^{म} + १) = ०$ ऐसे भी लिख सकते हैं। अब

$य^{म} - १ = ०$ और $य^{म} + १ = ०$ इन पर से भी दिए हुए समीकरण के मूलों को जान सकते हो।

९९—$य^{न} + १ = ०$ इसमें यदि न विषम $२म + १$ के तुल्य हो तो $य^{२म+१} + १ = ०$ इसका एक ही सम्भाव्य मूल -१ होगा। इसलिये $य^{२म+१} + १ = ०$ इसमें $य + १$ का भाग देने से एक हरात्मक समीकरण

$य^{२म} - य^{२म-१} + य^{२म-२} - \cdots\cdots + य^{२} - य + १ = ०$ ऐसा होगा। इस पर से मूलों को पता लग सकता है।

यदि न विषम हो तो स्पष्ट है कि य के स्थान में $-य$ का उत्थापन देने से $य^{न} - १ = ०$ ऐसा एक समीकरण बन जायगा

जिनके मूल पूर्व प्रक्रमों से वे ही विरुद्ध चिन्ह के आ जायँगे जो दिए हुए समीकरण के मूल हैं।

१००—$य^{न} + १ = ०$ यदि इसमें न सम २म के तुल्य हो तो $य^{२म} + १ = ०$ इसका एक भी संभाव्य मूल न होगा और $य^{२म} + १ = ०$ यह स्वयं हरात्मक समीकरण है, इसलिये इसमें $य^{म}$ का भाग देकर $य^{म} + \frac{१}{य^{म}} = ०$ यह पूर्वघात के आधे घात का एक समीकरण बन जायगा।

१०१—ऊपर के प्रक्रमों से स्पष्ट होता है कि $य^{न} - १ = ०$ और $य^{न} + १ = ०$ इन दोनों पर से एक ऐसा हरात्मक समीकरण बनता है जिसके सब मूल दिए हुए समीकरण के सब असम्भव मूल के तुल्य हैं और जिसमें ८१वें प्रक्रम से $य + \frac{१}{य} = र_{१}$, ऐसा होगा, जिसमें दिखला सकते हो कि $र_{१}$ का मान सर्वदा सम्भाव्य संख्या है।

यदि $य = \text{कोज्या}\,\frac{२त\pi}{न} + \sqrt{-१}\,\text{ज्या}\,\frac{२त\pi}{न} = अ_{१}$ (६५वाँ प्र० देखो)

$$\text{तो}\ य + \frac{१}{य} = र_{१} = \text{कोज्या}\,\frac{२त\pi}{न} + \sqrt{-१}\,\text{ज्या}\,\frac{२त\pi}{न}$$

$$+ \frac{\text{कोज्या}\,\frac{२त\pi}{न} - \sqrt{-१}\,\text{ज्या}\,\frac{२त\pi}{न}}{\left(\text{कोज्या}\,\frac{२त\pi}{न} + \sqrt{-१}\,\text{ज्या}\,\frac{२त\pi}{न}\right)} \times$$

$$\frac{१}{\left(\text{कोज्या}\,\frac{२त\pi}{न} - \sqrt{-१}\,\text{ज्या}\,\frac{२त\pi}{न}\right)}$$

$$= \text{कोज्या}\ \frac{२त\,\pi}{न} + \sqrt{-१}\ \text{ज्या}\ \frac{२त\,\pi}{न} + \text{कोज्या}\ \frac{२त\,\pi}{न} - \sqrt{-१}\ \text{ज्या}\ \frac{२त\,\pi}{न}$$

$$= \text{कोज्या}\ \frac{२त\,\pi}{न},$$

इस पर से $र_१$ का मान सम्भाव सिद्ध होता है।

१०२—इस प्रक्रम में पिछले प्रक्रमों की व्याप्ति के लिये कुछ उदाहरण दिखलाते हैं।

(१) $य^३ - १ = ०$ इसके मूलों को बताओ।

यहाँ एक मूल $+१$ यह सम्भाव्य है, इसलिये $य - १$ का भाग देने से

$$\frac{य^३ - १}{य - १} = य^२ + य + १ = ०।$$

इस पर से विशिष्ट मूल

$$\frac{-१ \pm \sqrt{-३}}{२}\ \text{हुए।}$$

इसमें यदि $\frac{-१ + \sqrt{-३}}{२} = अ_१$ और $\frac{-१ - \sqrt{-३}}{२} = अ_२$ तो $अ^२_१ = अ_२$। इसलिये $य^३ - १ = ०$ इसके क्रम से मूल

$अ_१,\ अ^२_१,\ अ^३_१\ (= १)$ इनको १ का घन मूल कहते हैं। मूलों में $अ_१$ को घा से प्रकट करते हैं।

य के चिन्ह को बदल देने से $य^३ + १ = ०$ इस समीकरण के क्रम से मूल

$$-अ_१,\ -अ^२_१,\ -अ^३_१\ (= -१)$$

(२) $य^६ - १ = ०$ । इसके मूलों को व्यक्त करो ।
दिए हुए समीकरण को

$(य^३ + १)(य^३ - १) = ०$ ऐसा भी लिख सकते हैं ।

इस पर से $य^३ + १ = ०$ और $य^३ - १ = ०$ ये हुए ।
फिर (१) उदाहरण से, $य^६ - १ = ०$ इसके क्रम से मूल

$अ_१, अ_१^२, १, -अ_१, -अ_१^२, -१$ ।

(३) $य^४ + १ = ०$ इसमें य के मान बताओ ।
यहाँ हरात्मक समीकरण की युक्ति से

$$य^२ + \frac{१}{य^२} = ० = र_१^२ - २ \text{ यदि } र_१ = य + \frac{१}{य} ।$$

इस पर से $र_१ = \pm\sqrt{२}$ और $य^२ + १ = \pm य\sqrt{२}$
इसलिये य के मान

$$\frac{१ + \sqrt{-१}}{\sqrt{२}}, \frac{१ - \sqrt{-१}}{\sqrt{२}}, \frac{-१ + \sqrt{-१}}{\sqrt{२}}, -\frac{१ + \sqrt{-१}}{\sqrt{२}} ।$$

(४) $य^५ - १ = ०$ इसके मूलों को बताओ ।

$$य^५ - १ = (य - १)(य^४ + य^३ + य^२ + य + १) = ०$$

हरात्मक समीकरण की युक्ति से

$$य^२ + \frac{१}{य^२} + य + \frac{१}{य} + १ = ०$$

यदि $र_१ = य + \frac{१}{य}$

तो $र_१^२ + र - १ = ०$ $\therefore र_१ = \frac{-१ \pm \sqrt{५}}{२}$

$र_१$ के ज्ञान से मूलों का ज्ञान सुलभ है ।

$य^{३} - १ = ०$ इसके मूलों के चिन्ह बदल देने से $य^{३} + १ = ०$ इसके सब मूल होंगे।

(५) $य^{९} - १ = ०$ इसमें य के मानों को बताओ।

यहाँ $य^{९} - १ = (य^{३} - १)(य^{६} + य^{३} + १) = ०$

$य^{३} - १ = ०$ इस पर से य के पूर्व सिद्ध तीन मान

$१, घा, घा^{२},$

और $य^{६} + य^{३} + १ = ०$ इस हरात्मक समीकरण से

$$य^{३} + \frac{१}{य^{३}} + १ = ०$$

इस पर से $र_{१}^{३} - ३र_{१} + १ = ०$ यह घन समीकरण बना जब $र_{१} = य + \frac{१}{य}$ इसमें यदि $र_{१}$ के मान व्यक्त हों तो य के बाकी छ मान भी व्यक्त हो जायँगे। (ऐसे घन समीकरण में य के मान कैसे व्यक्त होते हैं इसकी विधि आगे लिखी जायगी)

अथवा $य^{६} + ३य + १ = ०$ इस पर से वर्ग समीकरण की विधि से $य^{३} - घा = ०$, $य^{३} - घा^{२} = ०$ ऐसे दो समीकरण बनेंगे।

फिर $य^{३} - १ = ०$, $य^{३} - घा = ०$, $य^{३} - घा^{२} = ०$ ऐसे तीन समीकरणों से जो य के नव मान आते हैं वे क्रम से (८७वाँ प्रक्रम देखो)

$१, घा, घा^{२}, घा^{\frac{१}{३}}, घा^{\frac{४}{३}}, घा^{\frac{७}{३}}, घा^{\frac{२}{३}}, घा^{\frac{५}{३}}, घा^{\frac{८}{३}}$ ये हैं।

इनमें $घा^{\frac{१}{३}}$ इसको य का एक विशिष्ट मान मानने से दिये हुए समीकरण में य के क्रम से नव मान

१, $घा^{\frac{१}{३}}$, $घा^{\frac{२}{३}}$, घा, $घा^{\frac{४}{३}}$, $घा^{\frac{५}{३}}$, $घा^{२}$, $घा^{\frac{७}{३}}$, $घा^{\frac{८}{३}}$ ये सहज में आ जाते हैं।

इनमें $य^{३} - १ = ०$ इसके मूल १, घा, $घा^{२}$ को निकाल देने से

$(य^{३} - घा)(य^{३} - घा^{२}) = य^{६} + य^{३} + १ = ०$ इसमें के छवो मान य के हैं। इस प्रकार जहाँ पर जैसे लाघव हो उत्तर निकालना चाहिए।

अभ्यास के लिये प्रश्न

१। $य^{७} - १ = ०$ इसके मूल बताओ।

२। $य^{८} - १ = ०$ इसमें य के मान बताओ।

३। $य^{८} + १ = ०$ इसमें य के मान बताओ।

४। १०२ प्रक्रम के (१) उदाहरण से सिद्ध करो कि $१ + घा + घा^{२} = ०$।

५। सिद्ध करो कि $(घा म + घा^{२} न)(घा^{२} म + घा न)$ यह अकरणी गत होगा। उ० $म^{२} - म न + न^{२}$।

६। सिद्ध करो कि $(अ + घा क + घा^{२} ग)(अ + घा^{२} क + घा ग)$
$= अ^{२} + क^{२} + ग^{२} - अ क - अ ग - क ग$।

७। सिद्ध करो कि
$(अ + क + ग)(अ + घा क + घा^{२} ग)(अ + घा^{२} क + घा ग)$
$= अ^{३} + क^{३} + ग^{३} - ३ अ क ग$।

८। एक समीकरण ऐसा बनाओ जिसके मूल
$म + न$, $घा म + घा^{२} न$, $घा^{२} म + घा न$ हों।

उ० $य^{३} - ३ म न य - (म^{३} + न^{३}) = ०$

९। $(य+१)^{७} - (य^{७}+१)$ इसके गुणय गुणक रूप खण्डों को निकालो। उ० $७य(य+१)(य^{२}+य+१)^{२}$

१०। एक ऐसा घन समीकरण बनाओ जिसमें अव्यक्त के मान क्रम से

$अ_{१}+अ_{१}^{६}$, $अ_{१}^{२}+अ_{१}^{५}$, $अ_{१}^{३}+अ_{१}^{४}$ ये हों जहाँ $अ_{१}$, $य^{७}-१=०$ इसमें य का एक असम्भव मान है।

उ० $य^{३}+य^{२}-२य-१=०$।

११। $य^{५}-१=०$ इसका एक विशिष्ट मूल $अ_{१}$ हो तो एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसके मूल क्रम से $अ_{१}+२अ_{१}^{४}$, $अ_{१}^{२}+२अ_{१}^{३}$, $अ_{१}^{३}+२अ_{१}^{२}$, $अ_{१}^{४}+२अ_{१}$ ये हों।

उ० $य^{४}+३य^{३}-य^{२}-३य+११=०$

१२। $य^{१३}-१=०$ इसका एक विशिष्ट मूल $अ_{१}$ हो तो एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसके मूल क्रम से

$अ_{१}+अ_{१}^{८}+अ_{१}^{१२}+अ_{१}^{५}$, $अ_{१}^{२}+अ_{१}^{३}+अ_{१}^{११}+अ_{१}^{१०}$,

$अ_{१}^{४}+अ_{१}^{६}+अ_{१}^{९}+अ_{१}^{७}$ ये हों। उ० $य^{३}+य^{२}-४य+१=०$

१३। $४य^{४}-८५य^{३}+३५७य^{२}-३४०य+६४=०$ इस पर से एक हरात्मक समीकरण बना कर तब इसके मूलों को बताओ।

मान लो कि $र=\frac{य}{२}$ $\therefore$ $य=२र$। इसका उत्थापन समीकरण में देने से

$६४र^{४}-६८०र^{३}+१४२८र^{२}-६८०र+६४=०$ अब यह हरात्मक समीकरण बन जायगा। इस पर से र का मान व्यक्त होने से समीकरण के मूल भी व्यक्त हो जायँगे।

१४। $य^{न} - १ = ०$ इसमें यदि न दृढ़ हो और इसका एक असम्भव मूल $अ_१$ हो तो सिद्ध करो

$$(१ - अ_१)(१ - अ_१^२)(१ - अ_१^३)\cdots\cdots(१ - अ_१^{न-१}) = न$$

१५। $य^{१५} - १ = ०$ इसमें य के मान बताओ।

१६। $य^{१५} - १ = ०$ इसके सब विशिष्ट मूल वे ही हैं जो $य^८ - य^७ + य^५ - य^४ + य^३ - य + १ = ०$ इसके मूल हैं, यह सिद्ध करो।

१७। $य^८ - य^७ + य^५ - य^४ + य^३ - य + १ = ०$ यह एक हरात्मक समीकरण है। इस पर से ८१वें प्रक्रम की युक्ति से जो

$$र_१^४ - र_१^३ - ४र_१^२ + ४र_१ + १ = ०$$

ऐसा समीकरण बनेगा इसमें $र_१$ के मान

$$२कोज्या\,\frac{२\pi}{१५},\quad २कोज्या\,\frac{४\pi}{१५},\quad २कोज्या\,\frac{८\pi}{१५},\quad २कोज्या\,\frac{१४\pi}{१५}$$

ये ही होंगे यह सिद्ध करो।

१०—परिच्छिन्न मूल

१०३—जिस मूल को किसी अभिन्नाङ्क वा भिन्नाङ्क से प्रकाश कर सकें उसको परिच्छिन्न मूल कहते हैं। जैसे ४, १, $\frac{२}{३}$ इत्यादि।

बीजगणित से सिद्ध है कि किसी करणी का मान न अभिन्नांक, न भिन्नाङ्क होता है इसलिये करणीगत राशि का मूल परिच्छिन्न मूल नहीं है। जैसे $\sqrt{५}$ इस करणी का मान न अभिन्न है और न भिन्न है, इसलिये $\sqrt{५}$ इसका मूल संभाव्य तो है परन्तु परिच्छिन्न नहीं है।

करणी का मान न भिन्नाङ्क, न अभिन्नाङ्क होता है इसकी उपपत्ति को कमलाकर ने अपने बनाए हुए तत्त्वविवेक ग्रन्थ के स्पष्टाधिकार में बहुत अच्छी तरह से लिखा है। भारतवर्ष में जिस समय (शक १५८० वा सन् १६५८ ई०) इसने अपने इस ग्रन्थ को लिखकर पूरा किया था उस समय यूरप में न्यूटन की उमर बारह वर्ष की थी।

१०४—फ (य) = ० इसके आदि पद का गुणक एक हो और अन्य पदों के गुणक यदि परिच्छिन्न अभिन्न हों तो समीकरण का एक भी मूल परिच्छिन्न भिन्न नहीं हो सकता।

कल्पना करो कि समीकरण

$य^{न} + प_{१}य^{न-१} + प_{२}य^{न-२} + \cdots\cdots + प_{न-१}य + प_{न} = ०$ ऐसा है

और यदि सम्भव हो तो कल्पना करो कि इस समीकरण का एक परिच्छिन्न भिन्न मूल $\frac{अ}{क}$ है जिसमें अ और क परस्पर दृढ़ हैं। इसका उत्थापन ऊपर के समीकरण में य के स्थान में देने से और दोनों पक्षों को $क^{न-१}$ से गुण देने से

$$\frac{अ^{न}}{क} + प_{१}अ^{न-१} + प_{२}अ^{न-२}क + \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ प_{न-२}अ^{२}क^{न-३} + प_{न-१}अक^{न-२} + प_{न}क^{न-१} = ०$$

$$\therefore -\frac{अ^{न}}{क} = प_{१}अ^{न-१} + प_{२}अ^{न-२}क + \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ प_{न-२}अ^{२}क^{न-३} + प_{न-१}अक^{न-२} + प_{न}क^{न-१}$$

परन्तु यह असम्भव सिद्ध होता है क्योंकि अ और क के परस्पर दृढ़ होने से $\frac{अ^{न}}{क}$ यह एक भिन्नाङ्क ही होगा और दहिना पक्ष अभिन्नाङ्क सिद्ध है, इसलिये कोई दृढ़ भिन्न किसी अभिन्नाङ्क के तुल्य कैसे हो सकता है। इसलिये ऊपर के समीकरण का एक भी मूल परिच्छिन्न भिन्नाङ्क नहीं हो सकता।

अब ऊपर के समीकरण में इतना ही विचार करना चाहिए कि उसका कोई मूल अभिन्न परिच्छिन्न है वा नहीं। इसके लिये जो आगे रीति लिखी जायगी उसे भाजक रीति अथवा न्यूटन की रीति कहते हैं।

१०५—कल्पना करो कि

$$फ(य) = य^{न} + प_1 य^{न-1} + प_2 य^{न-2} + \cdots\cdots प_{न-1} य + प_न = 0$$

इसका एक अभिन्न परिच्छिन्न मूल अ है तो इसका उत्थापन य के स्थान में देने से

$$अ^{न} + प अ^{न-1} + \cdots\cdots\cdots + प_{न-1} अ + प_न = 0$$

इसमें अ का भाग देकर पदों को उलट कर रखने से

$$\frac{प_न}{अ} + प_{न-1} + प_{न-2} अ + \cdots\cdots\cdots + प_1 अ^{न-2} + अ^{न-1} = 0$$

इसलिये $\frac{प_न}{अ}$ यह अवश्य अभिन्न होगा। मान लो कि यह $ब_1$ के तुल्य है तो ऊपर के समीकरण में फिर अ का भाग देने से

$$\frac{ब_1 + प_{न-1}}{अ} + प_{न-2} + \cdots\cdots + प_2 अ^{न-4} + प_1 अ^{न-3} + अ^{न-2} = 0$$

इसलिये $\frac{ब_१ + प_{न-१}}{अ}$ यह अभिन्न होगा, मान लो कि यह $ब_२$ के तुल्य है तो फिर ऊपर के समीकरण में अ का भाग देने से

$$\frac{ब_२ + प_{न-२}}{अ} + प_{न-३} + \cdots + प_२ अ^{न-५} + प_१ अ^{न-४} + अ^{न-३} = ०$$

$\frac{ब_२ + प_{न-२}}{अ}$ यह अभिन्न होगा। इसे ऊपर की युक्ति से अभिन्न $ब_३$ कहें और फिर अ का भाग दें तो $\frac{ब_३ + प_{न-३}}{अ}$ यह अभिन्न ठहरेगा। यों तन्त तक क्रिया करने से अन्त में

$\frac{ब_{न-१} + प_१}{अ} + १ = ०$ देखा होगा। इस पर से नीचे लिखी हुई क्रिया उत्पन्न होती है।

यदि फ $(य) = ०$ इसका एक मूल अ होगा तो समीकरण का अन्त पद अ से अवश्य निःशेष होगा। लब्धि में य के गुणकाङ्क के जोड़ने से जो संख्या होगी वह भी अ से निःशेष होगी। इस लब्धि में $य^२$ का गुणकाङ्क जोड़ने से जो संख्या होगी वह भी अ से निःशेष होगी। यही क्रिया $न - १$ वार तक करने से जो निःशेष लब्धि आवे उसमें $य^{न-१}$ का गुणकाङ्क जोड़ कर अ का भाग दो, यदि लब्धि -१ के तुल्य आवे तो निश्चय समझना चाहिए कि फ $(य) = ०$ इस समीकरण का एक मूल अ अवश्य है। यदि ऊपर की स्थिति का कहीं पर व्यभिचार हो जाय तो समझना कि अभिन्न अ समीकरण का मूल नहीं है।

१०६—ऊपर की क्रिया से स्पष्ट है कि यदि अव्यक्त का मान परिच्छिन्न अ है तो समीकरण का अन्त पद उससे अवश्य निःशेष होता है। इसलिये दिए हुए किसी पूरे समीकरण के अभिन्न परिच्छिन्न मूल जानने के लिये देख लेना चाहिए कि किस किस अभिन्नाङ्क से अन्त पद निःशेष होता है। जिनसे निःशेष हो, स्पष्ट है कि उन्हीं में से कोई न कोई संभव रहते समीकरण का एक मूल होगा। इसलिये अन्त पद को निःशेष करने वाले उन हारों में से एक एक को लेकर १०५वें प्रक्रम की क्रिया करो। जिन जिन हारों में क्रिया, आदि से अन्त तक, पूरी पूरी उतर जाय उन उन हारों को निःशंसय दिए हुए समीकरण के मूल कहो। दिया हुआ समीकरण यदि पूरा न हो तो ३ प्रक्रम से उसे पूरा कर तब क्रिया करना आरम्भ करो।

परिश्रम बचाने के लिए दिए हुए समीकरण के मूलों की धन और ऋण सीमाओं को ६ अध्याय से जान कर अन्त पद को निःशेष करने वाले हारों में जो जो उन सीमाओं के बाहर पड़े हों उन्हें छोड़ कर जो भीतर हों उन्हीं से १०६ प्र० की क्रिया करो, क्योंकि जो सीमाओं से बाहर हैं वे सीमासाधन की युक्ति से समीकरण के मूल नहीं हो सकते, इसलिये उनको लेकर क्रिया करने से व्यर्थ समय को नष्ट करना है। और अन्त पद के जो +१ और −१ भाग हार हैं उन पर से भी क्रिया करना व्यर्थ गौरव दोष लगाना है क्योंकि +१ और −१ इनका उत्थापन य के स्थान में देने से बड़े लाघव से जान सकते हो कि दिए हुए समीकरण में ये दोनों य के मान हैं वा नहीं।

उदाहरण—(१) $य^2 - १६य + ३० = ०$ इसका परिच्छिन्न मूल निकालो।

यहाँ अन्त पद ३० को निःशेष करने वाले भाग हार

२, ३, ५, ६, १५, १०, ३०, −२, −३, −५, −६, −१५, −१०, −३०।

धनात्मक मूलों की प्रधान सीमा, समीकरण को $य(य^2 - १६) + ३० = ०$ ऐसा लिखने से ५ हुई और य के स्थान में −य का उत्थापन देने से ऋण मूलों की प्रधान सीमा, $य^3 - १६य + ३० = ०$ इसे दो से गुण कर $य^3$ को दोनों पदों में मिलाने से

$य(य^2 - ३८) + य^3 - ६० = ०$ इस पर से −७ आती है। इसलिये −७ और ५ के भीतर हारों को चुनने से क्रियोपयोगी संख्यायें

−६, −५, −३, −२, २, ३, ५ ये हुईं।

पूरे समीकरण के पद गुणकों को उलट कर एक पंक्ति में रखने से तथा पहले −६ से क्रिया करने में

३०	−१६	०	१
	−५	+४	
	−२४	+४	

+४ यह अब −६ से निःशेष नहीं होता, क्रिया रुक गई, इसलिये −६ यह समीकरण का मूल नहीं है।

−५ से क्रिया करने में

३०	−१६	०	१
	−६	+५	−१
	−२५	+५	०

यहाँ पूरी क्रिया उतर गई इसलिये −५ यह एक मूल हुआ।

−३ से क्रिया करने में

३०	−१६	०	१
	−१०		
	−२६		

−२६ यह −३ से निःशेष नहीं होता इसलिये क्रिया के रुकने से −३ यह एक मूल नहीं हो सकता।

−२ से क्रिया करने में

३०	−१६	०	१
	−१५	−१७	
	−३४	−१७	

−१७ यह −२ से नहीं निःशेष होता इसलिये क्रिया रुकने से −२ यह मूल नहीं है।

+२ से क्रिया करने में

३०	−१६	०	१
	+१५	−१	−१
	−४	−२	०

यहाँ पूरी क्रिया उतर गई इसलिये २ यह एक मूल हुआ

+३ से क्रिया करने में

३०	−१६	०	१
	+१०	−३	−१
	−६	−३	०

यहां पूरी क्रिया उतर जाने से ३ यह एक मूल हुआ।

+५ से क्रिया करने में

३०	−१६	०	१
	+ ६		
	−१३		

यहां −१३ यह ५ से नहीं निःशेष होता इसलिये क्रिया के रुक जाने से ५ यह मूल नहीं हुआ। इसलिये $य^{३}$ − १६य + ३०=० इसके तीनों मूल क्रम से −५, २, ३ हुए।

१०७—फ (य) = ० इसका यदि एक मूल अ हो और यदि य के स्थान में र+म का उत्थापन दें तो स्पष्ट है कि फ (र+म) = ० इसमें र का एक मान अ −म होगा जहां अ, क दोनों अभिन्न हैं।

अ और म के अभिन्न होने से र का एक मान अ−म यह अभिन्न होगा और १०६वें प्रक्रम की युक्ति से फ (र+म) में जो र से स्वतन्त्र पद फ (म) होगा उसे निःशेष भी करैगा। इसलिये यदि फ (म) को अ−म निःशेष न करै तो र का मान अ−म नहीं होगा तब दिए हुए समीकरण में य का मान अ भी नहीं होगा। इसलिये र का एक मान अ−म है।

परीक्षा करने में सुभीता पड़े और फ (म) के मान जानने में भी थोड़ा परिश्रम हो इसलिये म को +१ वा −१ मान लेते हैं। यदि फ (१) यह अ−१ से और फ (−१) यह अ+१ से निःशेष न हो तो कहेंगे कि फ (य) = ० इसका एक मूल अ

नहीं है। अब इस पर से भी अन्त पद को निःशेष करनेवाले हारों में से कौन क्रियोपयोगी नहीं हैं उनका पता लगा सकते हो

जैसे १०६वें प्रक्रम के उदाहरण $य^{३} - १९य + ३० = ०$ इसमें पहले जो −६, −५, −३, −२, २, ३, ५ ये संख्यायें लेकर क्रिया करते रहे उनमें

फ (१) = १२ इसमें −६ − १ = −७ का पूरा पूरा भाग नहीं लगता इसलिये −६ यह समीकरण का मूल नहीं हो सकता।

इसी प्रकार फ (−१) = ४८ इसमें भी −६ + १ = −५ का भाग नहीं जाता इसलिये इससे भी सिद्ध होता है कि −६ को समीकरण का मूल न ग्रहण करना चाहिए।

इस प्रकार फ $(य) = य^{३} - ३य^{२} - ८य - १० = ०$ इस उदाहरण में धनमूलों की सीमा ११, य के स्थान में −र का उत्थापन देने से और उचित रीति से समीकरण बनाने से

$$र^{३} + ३र\left(र - \frac{८}{३}\right) + १० = ०$$

इसमें स्पष्ट है कि र के धन मानों की सीमा ३ होगी, इसलिये य के ऋण मानों की सीमा −३ हुई। अब −३ और ११ के बीच में अन्त पद १० को निःशेष करनेवाले +१ और −१ को छोड़ कर और हार

१०, ५, २, −२ ये हैं।

इनमें फ (१) = −२० इसको १० − १ = ९ यह निःशेष नहीं करता इसलिये समीकरण का एक मूल १० को न ग्रहण करना चाहिए।

इसी प्रकार $य^३ - २०य^२ + १६४य - ४०० = ०$ इस पूरे समीकरण में डेकार्टिस् की युक्ति से सर के न होने से य का कोई ऋणमान नहीं है तब स्पष्ट है कि दूसरे पद के गुणक को विरुद्ध चिन्ह का बना कर ग्रहण करने से य के सब धन मानों का योग २० होगा इसलिये य का कोई एक धन मान २० से अधिक नहीं होगा तब य के धन मानों की प्रधान सीमा २० हुई

(इस उदाहरण में य के धन मानों की सीमा जानने के लिये टाड्हण्टर साहब ने जो समीकरण का रूपान्तर कर ग्रन्थ को बढ़ाया है वह व्यर्थ है। इनके ग्रन्थ का ११६वाँ प्रक्रम देखो) और य का ऋण मान कोई है ही नहीं।

इसलिये अन्त पद ४०० को निःशेष करनेवाले २० से अल्प हार २, ४, ५, ८, १० और १६ ये हुए।

और फ (१) = −२२५ इसमें ५−१ = ४, ८−१ = ७, १०−१ = ९ इनका निःशेष भाग न लगने से ५, ८ और १० इन्हें ऊपर लिखे हुए समीकरण के मूल न ग्रहण करना चाहिए। केवल २, ४ और १६ से परीक्षा करने के लिये १००५वें प्रक्रम की क्रिया करो।

२ से क्रिया करने में

−४००	१६४	−२०	१
	−२००	−१८	−१९
	−३६	−३८	−१८

यहाँ अन्त में शून्य नहीं हुआ इसलिये २ यह मूल नहीं है।

४ से क्रिया करने में

−४००	१६४	−२०	१
	−१००	+१६	−१
	+ ६४	− ४	०

यहाँ क्रिया पूरी हो जाने से ४ यह समीकरण का एक मूल हुआ १६ से क्रिया करने में

−४००	१६४	−२०	१
	− २५		
	१३९		

यहाँ १३९ यह १६ से निःशेष नहीं होता। इसलिये १६ यह समीकरण का मूल नहीं है। इस प्रकार से दिए हुए समीकरण का परिच्छिन्न अभिन्न मूल एक ही ४ है।

१०८—फ (य) = ० इसमें य के सब से बड़े घात के गुणकाङ्क से अपवर्त्तन देने से समीकरण के छोटे रूप में पदों के गुणक अभिन्न न हों तो ३६वें प्रक्रम से एक नया समीकरण जिसमें सब पदों से गुणक अभिन्न हों बना कर तब १०५वें प्रक्रम की क्रिया करना आरंभ करो। फिर नये समीकरण के मूल से दिए हुए समीकरण के मूल निकाल सकते हो। जैसे

उदाहरण—(१) फ (य) $= य^३ + \frac{य^२}{२} - \frac{१७}{४}य + \frac{१५}{८} = ०$

इसमें यदि $य = \frac{र}{२}$ तो

$$फ(य) = \frac{र^३}{८} + \frac{र^२}{८} - \frac{१७र}{८} + \frac{१५}{८} = ०$$

८ से गुणा देने से अभिन्न समीकरण

$$र^३ + र^२ - १७र + १५ = ०।$$

इसका रूपान्तर करने से धन मूलों की सीमा ५ हुई।

र के स्थान में −र का उत्थापन देने से और समीकरण को ३ से गुण रूपान्तर करने से ऋण मूलों की सीमा −८ हुई।

इन दोनों के भीतर अन्त पद को निःशेष करनेवाली संख्यायें

१, ३, ५, −१, −३, −५ ये हुईं।

और फ (१) = ० । इसलिये र का एक मान १ है।

फ (−१) = ३२ । इसलिये र का एक मान −१ यह नहीं है।

३ से क्रिया करने में

१५	−१७	१	१
	+५	−४	−१
	−१२	−३	०

पूरी क्रिया उतर जाने से ३ यह र का एक मान हुआ।

५ से क्रिया करने में

१५	−१७	१	१
	+३		
	−१४		

५ से −१४ इसके निःशेष न होने से ५ यह र का मान नहीं है।

−३ से क्रिया करने में

१५	−१७	१	१
	−५		
	−२२		

−३ से −२२ इसके निःशेष न होने से र का मान −३ नहीं है।

−५ से क्रिया करने में

१५	−१७	१	१
	− ३	+४	−१
	−२०	+५	०

क्रिया के पूरी होने से −५ यह र का एक मान हुआ।

इसलिये र के मान १, ३, −५ ये हुए और $य = \frac{र}{२}$ इसलिये य के मान $\frac{१}{२}$, $\frac{३}{२}$, $-\frac{५}{२}$ ये सिद्ध हुए।

इस पर से यह भी सिद्ध कर सकते हो कि जब फ (य)=० इसमें य के सब से बड़े घात का गुणक रूपातिरिक्त कोई संख्या हो और सब पद के गुणक अभिन्न भी हों तो भी यह नहीं कहा जा सकता कि य का मान परिच्छिन्न अभिन्नाङ्क होगा।

१०६—५६वें प्रक्रम में फ (य) और फ′ (य) के महत्तमापवर्त्तन परम्परा से दिखला आए हैं कि फ (य)=० इसके कितने मूल दो बार, कितने तीन बार इत्यादि आते हैं। यदि फ (य) में सब पद के गुणक परिच्छिन्न मूल के होंगे तो स्पष्ट है कि ५६वें प्रक्रम में जो $या_१$, $या_२$ इत्यादि के मान आवेंगे उनके पद के गुणक भी सब परिच्छिन्न मूल के होंगे। इसलिये यदि फ (य)=० इसमें य का एक ही कोई मान त बार होगा तो वह अव्यक्त मान $या_त = ०$ इससे जो आवेगा वह परिच्छिन्न मूल का होगा क्योंकि एक ही अव्यक्त मान जो त बार आया है उसका एक ही मान $या_त = ०$ इससे निकलेगा। इसलिये $या_त$ यह य के एक घात का खण्ड होगा अर्थात् $या_त = अय - क$ इस रूप का होगा जहाँ ऊपर की युक्ति से अ और क दोनों परि-

च्छिन्न मूल के होंगे। इसलिये त वार आए हुए अव्यक्त मान की संख्या $या_त = ०$ इससे परिच्छिन्न मूल ही की होगी।

इस पर से नीचे लिखे हुए तीन विशेष उत्पन्न होते हैं

विशेष—(१) यदि किसी घन समीकरण में सब पद के गुणक परिच्छिन्न मूल के हों और १०५वें प्रक्रम की युक्ति से इस समीकरण का कोई मूल परिच्छिन्न मूल का न आवे तो उस घन समीकरण के समान मूल न आवेंगे। क्योंकि यदि समान मूल होंगे तो एक मूल तीन वार आवेगा वा एक मूल दो बार और दूसरा एक वार आवेगा। दोनों स्थितिओं में ऊपर की युक्ति से एक मूल परिच्छिन्न मूल का होगा जिसका होना कल्पना से विरुद्ध है।

(२) यदि किसी चतुर्घात समीकरण में सब पद के गुणक परिच्छिन्न मूल के हों और १०५वें प्रक्रम की युक्ति से उस समीकरण का कोई मूल परिच्छिन्न मूल का न आता हो तो ऐसा नहीं हो सकता कि उस चतुर्घात समीकरण का एक मूल चार वार या तीन वार आवे, क्योंकि ऐसा होने से ऊपर की युक्ति से वह मूल परिच्छिन्न होगा जो कल्पना से विरुद्ध है। इसलिये यदि इस चतुर्घात समीकरण के मूल समान होंगे तो दो वार एक मूल और दो वार दूसरा मूल आवेगा। ऐसी स्थिति में फ (य) = ० इसमें फ (य) यह एक पूरा पूरा वर्ग होगा।

(३) यदि किसी पञ्चघात समीकरण में सब पदों के गुणक परिच्छिन्न मूल के हों और १०५वें प्रक्रम की युक्ति से उस समीकरण का कोई मूल परिच्छिन्न मूल का न हो तो उस पञ्चघात समीकरण का कोई मूल समान न होगा। क्योंकि

यदि एक मूल चार वार आवे और दूसरा एक वार तो जो चार वार आवेगा वह ऊपर की युक्ति से परिच्छिन्न होगा जो कल्पना से विरुद्ध है। यदि एक मूल दो वार, दूसरा दो वार और तीसरा एक बार आवे तो ऊपर की युक्ति से तीसरा परिच्छिन्न ठहरेगा। यदि एक मूल दो वार और दूसरा, तीसरा और चौथा एक एक वार आवें तो जो दो वार आया है वह परिच्छिन्न ठहरेगा। यदि एक मूल तीन वार और दूसरा दो वार आवें तो दोनों परिच्छिन्न ठहरेंगे। यदि एक मूल तीन वार और दूसरा और तीसरा एक एक वार आवें तो जो तीन वार आयेगा वह परिच्छिन्न ठहरेगा। इस तरह से हर एक स्थिति में एक मूल परिच्छिन्न ठहरता है जो कल्पना से विरुद्ध है।

अभ्यास के लिये प्रश्न

१। परिच्छिन्न मूल से क्या समझते हो।

२। $य^४ - २य^३ - १३य^२ + ३८य - २४ = ०$ इसमें य के परिच्छिन्न मान बताओ। उ० १,२,३,−४।

३। $३य^४ - २३य^३ + ३५य^२ + ३१य - ३० = ०$ इसके परिच्छिन्न मूल बताओ। उ० १,३,५।

४। $य^४ + य^३ - २य^२ + ४य - २४ = ०$ इसमें य के सब मान बताओ। उ० $-३, २, \pm २\sqrt{-१}$

५। $य^४ - २य^३ - १९य^२ + ६८य - ६० = ०$ इसके सब मूल बताओ। उ० २,२,३,−५।

६। $य^५ - २३य^४ + १६०य^३ + ३१य^२ - ३२य + ६० = ०$ इसमें य के परिच्छिन्न मान बताओ। उ० ५,८,११

७ । $य^५ - २९य^४ - ३१य^३ + ३१य^२ - ३२य + ६० = ०$ इसके परिच्छिन्न मूल बताओ । उ० १, −२, ३० ।

८ । फ $(य) = ०$ इसमें अन्तिम पद जो य से स्वतन्त्र है यदि विषम संख्या हो और फ (१) यह भी विषम संख्या हो तो फ $(य) = ०$ इसमें य का कोई अभिन्न परिच्छिन्न मान न होगा ।

९ । फ $(य) = ०$ इसमें यदि फ (०) और फ (-१) दोनों विषम संख्या हों तो फ $(य) = ०$ इसमें य का कोई अभिन्न परिच्छिन्न मान न होगा ।

११—समीकरण के मूलों का आनयन

११०—जिस रीति से वर्गादि समीकरण के मूल निकाले जाते हैं उस रीति को मूलानयन कहते हैं ।

बीजगणित से किसी वर्गसमीकरण को $य^२ + पा य + वा = ०$ इस प्रकार का बना सकते हो जिसका पक्षान्तर से $य^२ + पा य = - वा$ ऐसा रूप होगा । दोनों पक्षों को ४ से गुण कर $पा^२$ जोड़ कर वर्ग मूल लेने से

$$२य + पा = \pm\sqrt{पा^२ - ४वा} \therefore य = \frac{-पा \pm \sqrt{पा^२ - ४वा}}{२}$$

इस पर से य के दो मान सिद्ध होते हैं जिनसे गुण्य गुणक रूप खण्डों में दिए हुए समीकरण का

$$\left\{ य - \left(\frac{-पा + \sqrt{पा^२ - ४वा}}{२} \right) \right\} \left\{ य - \left(\frac{-पा - \sqrt{पा^२ - ४वा}}{२} \right) \right\} = ०$$

ऐसा रूप होगा । बीजगणित की साधारण रीति से यह क्रिया प्रसिद्ध है इसलिये इस पर कुछ बढ़ा कर लिखना केवल

ग्रन्थ को व्यर्थ बढ़ाना है। इसलिये आगे घन समीकरण पर विचार करते हैं।

१११—किसी पूरे समीकरण पर से ३९वें प्रक्रम की युक्ति से उसी घात का एक नया समीकरण बना सकते हो जिसमें दूसरा पद उड़ जायगा। इसलिये घनसमीकरण पर से एक ऐसा समीकरण बन सकता है जिसमें अव्यक्त का घन, अव्यक्त का एक घात और व्यक्ताङ्क रहे पर अव्यक्त का वर्ग न रहे। इसलिये जो घनसमीकरण

$य^३ + पय + त = ०$ ऐसा है उसी में य के मानानयन का विचार करते हैं

११२—कल्पना करो कि दिया हुआ समीकरण

$य^३ + पय + त = ०$ ऐसा है।

इसमें कल्पना करो कि $य = र + ल$ तो समीकरण में इसका उत्थापन देने से

$$(र + ल)^३ + प(र + ल) + त = ०$$

या $$र^३ + ल^३ + (३ रल + प)(र + ल) + त = ० \cdots\cdots (१)$$

इसमें मान लो कि र, ल ऐसे हैं जिनके वश से $३रल + प = ०$ होता है तो

$$ल = -\frac{प}{३र} \cdots\cdots (२)$$

इसका उत्थापन (१) में देने से

$$र^३ + \left(\frac{-प}{३र}\right)^३ + त = ०$$

या $$र^६ + तर^३ - \frac{प^३}{२७} = ०$$

इस पर से $$र^३ = -\frac{त}{२} \pm \sqrt{\left(\frac{त^२}{४} + \frac{प^३}{२७}\right)}$$

और $$ल^३ = -त - र^३ = -\frac{त}{२} \mp \sqrt{\left(\frac{त^२}{४} + \frac{प^३}{२७}\right)}$$

यहां र और ल के परस्पर बदल देने से कोई भेद नहीं पड़ैगा इसलिये चिन्ह युगल के स्थान में $र^३$ में धन और $ल^३$ में ऋण लेने से

$$य = \left\{ -\frac{त}{२} + \sqrt{\left(\frac{त^२}{४} + \frac{प^३}{२७}\right)} \right\}^{\frac{१}{३}}$$

$$+ \left\{ -\frac{त}{२} - \sqrt{\left(\frac{त^२}{४} + \frac{प^३}{२७}\right)} \right\}^{\frac{१}{३}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (३)$$

१०२ प्रक्रम के (१) उदाहरण से १ का घन मूल १, घा, $घा^२$ है इसलिये यदि $-\frac{त}{२} + \sqrt{\left(\frac{त^२}{४} + \frac{प^३}{२७}\right)}$ इसका एक घन मूल व्यक्त गणित से म संख्या तुल्य आवे तो ८४वें प्रक्रम से इनके तीनों घन मूल म, मघा, $मघा^२$ होंगे। इसी युक्ति से व्यक्तगणित से यदि $-\frac{त}{२} - \sqrt{\left(\frac{त^२}{४} + \frac{प^३}{२७}\right)}$ इसका एक घन मूल न संख्या तुल्य हो तो तीनों घन मूल नघा, $नघा^२$ ये हैं।

इस प्रकार से य के मान जो दो संख्याओं के घन मूल के योग तुल्य आता है उसके प्रत्येक घन मूलों के तीन तीन भेद होने से नव मान आवेंगे परान्तु घनसमीकरण में य के तीन मानों से अधिक नहीं हो सकते। इसलिये य के नव मानों में से छ मान अशुद्ध होंगे और तीन मान शुद्ध। इनकी परीक्षा के लिये (२) से जो $र \cdot ल = -\frac{प}{३}$ यह सिद्ध होता है उससे क्रिया करनी चाहिए।

कल्पना करो कि र = म, और ल = न। म और न ऐसे हैं जिनसे $म \cdot न = -\frac{प}{३}$ यह ठीक हो जाता है तो म और न को आद्य मान कहेंगे। और यदि र = मघा, $ल = नघा^२$ तो

$र\cdot ल = म\cdot न\cdot घा^3 = मन$। इसलिये $म\cdot घा$ और $न\cdot घा^2$ ये दो भी ग्राह्य होंगे।

इसी प्रकार यदि $र = म\cdot घा^2$ और $ल = न\cdot घा$ तो भी $र\cdot ल = म\cdot न\cdot घा^3 = मन$।

इसलिये ये दोनों मान भी ग्राह्य हैं। इन पर से य के तीन मान क्रम से

$म + न$, $घा\cdot म + घा^2\cdot न$, $घा^2\cdot म + घा\cdot न$, ये होंगे।

र और ल के और मान लेने से $र\cdot ल = -\frac{घा\,प}{3}$ ऐसा होगा, $-\frac{प}{3}$ ऐसा नहीं होगा इसलिये उन मानों को न ग्रहण करना चाहिए। जैसे

उदाहरण—(१) $य^3 - ५य - १२ = ०$

इसमें $प = -५$ और $त = -१२$

$$इसलिये \left\{-\frac{त}{2} + \sqrt{\left(\frac{त^2}{४} + \frac{प^3}{२७}\right)}\right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left\{६ + \sqrt{\left(३६ - \frac{१२५}{२७}\right)}\right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left(६ + \sqrt{\frac{८४७}{२७}}\right)^{\frac{1}{3}} = २\cdot३\cdots\cdots\cdots$$

इसी प्रकार

$$\left\{-\frac{त}{2} - \sqrt{\left(\frac{त^2}{४} + \frac{प^3}{२७}\right)}\right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left(६ - \sqrt{\frac{८४७}{२७}}\right)^{\frac{1}{3}} = \cdot७\cdots\cdots\cdots$$

इसलिये $य = २\cdot३ + \cdot७ = ३$

इसका उत्थापन देने से समीकरण ठीक हो आता है; इसलिये य का मान यह ठीक ही आया। इसलिये य — १ इसका समीकरण में भाग दे देने से

$$य^{2} + ३य + ४ = ० \text{ यह हुआ।}$$

इस पर से य के दो मान $\frac{-३ \pm \sqrt{-७}}{२}$ ये और आ जाते हैं।

ऊपर जो घन मूल का मान है उसके जानने के लिये बीजगणित से सर्व साधारण कोई रीति नहीं उत्पन्न होती। इसके लिये गणित क्रिया से आसन्न मान निकालना चाहिए अथवा द्वियुक्पद सिद्धान्त से $\left(६ \pm \sqrt{\frac{८४७}{२७}}\right)^{\frac{१}{३}}$ इसे फैला कर तब आसन्न मान निकालो।

ऊपर जिस रीति से घनसमीकरण के मूल निकले हैं उसे कार्डन (Cardan) साहेब ने निकाला है। इसलिये उनके आदरार्थ कार्डन की रीति (Cardan's solution of a cubic equation) कहते हैं।

११३—ऊपर घनसमीकरण में अव्यक्त के जो मान दिखलाये गये हैं उन पर कुछ विशेष विचार करते हैं।

कल्पना करो कि प और त संभाव्य संख्या हैं तो प और त के मान के वश से $र^{३}$ और $ल^{३}$ के मान संभाव्य और असंभाव्य दोनों हो सकते हैं।

पहिले कल्पना करो कि मान संभाव्य हैं और पाटीगणित की रीति से क्रम से $र^{३}$ और $ल^{३}$ के एक एक मान म और न हैं तो इस स्थिति में दिए हुए समीकरण में य के मान क्रम से

$म+न$, $म\cdot घा+नघा^{२}$, $म\cdot घा^{२}+न\cdot घा$ ये होंगे।

इनमें घा के स्थान में उनके मान $\frac{-१+\sqrt{-३}}{२}$ इसका उत्थापन देने से य के क्रम से मान

$$म+न,\ -\tfrac{१}{२}(म+न)+\tfrac{१}{२}(म-न)\sqrt{-३},$$
$$-\tfrac{१}{२}(म+न)-\tfrac{१}{२}(म-न)\sqrt{-३}$$ ये होंगे।

यदि म और न तुल्य न हों तो इनमें पिछले दो मान असंभव होंगे। यदि म और न तुल्य हों तो पिछले दो मान समान होंगे जिनकी संख्या $-म$ वा $-न$ के तुल्य होगी।

ऐसी स्थिति में $र^{३}=ल^{३}$, इसलिये $\frac{त^{२}}{४}+\frac{प^{३}}{२७}=०$। इसके व्यतिरेक से कह सकते हो कि किसी घनसमीकरण में अव्यक्त के तीनों मान यदि असमान और संभाव्य हों तो $र^{३}$ और $ल^{३}$ के मान असम्भाव्य होंगे।

अब कल्पना करो कि $र^{३}$ और $ल^{३}$ दोनों असंभाव्य हैं तो $\frac{त^{२}}{४}+\frac{प^{३}}{२७}$ यह ऋण संख्या होगा और १५वें प्रक्रम से $र^{३}$ और $ल^{३}$ के घनमूल क्रम से $म=म_{१}+न_{१}\sqrt{-१}$, $न=म_{१}-न_{१}\sqrt{-१}$ ये होंगे। इस स्थिति में दिए हुए घनसमीकरण में क्रम से अव्यक्त के मान

$$म_{१}+न_{१}\sqrt{-१}+म_{१}-न_{१}\sqrt{-१}=२म_{१},$$
$$(म_{१}+न_{१}\sqrt{-१})घा+(म_{१}-न_{१}\sqrt{-१})घा^{२}=-म_{१}-न_{१}\sqrt{३}$$
और $(म_{१}+न_{१}\sqrt{-१})घा^{२}+(म_{१}-न_{१}\sqrt{-१})घा=-म_{१}+न_{१}\sqrt{३}$।

११४—ऊपर जो अव्यक्त मान लिखे हैं उनसे स्पष्ट होता है कि यदि दिए हुए घनसमीकरण में अव्यक्त के तीनों मान

असमान और संभाव्य हों तो व्यवहार में कार्डन की रीति से काम नहीं चल सकता। क्योंकि इस स्थिति में र³ और ल³ असंभाव्य हैं। यहाँ बीज गणित की युक्ति से यद्यपि जानते हैं कि इसका कोई न कोई असंभाव्यात्मक मूल निकलेगा तथापि पाटीगणित की युक्ति से उन घनमूलों के मान नहीं जान सकते जिसके लिये इतना प्रयास किया गया है। इसलिये ऐसी स्थिति में कार्डन की रीति से काम नहीं चलेगा। जैसे

उदाहरण—(१) $य^३ - १२य + ९ = ०$

यहाँ $त = +९$ और $प = -१२$

इसलिये $-\frac{त}{२} + \sqrt{\frac{त^२}{४} + \frac{प^३}{२७}} = -४\frac{१}{२} + \sqrt{\frac{८१}{४} - ६४}$

$$= -\frac{९}{२} + \frac{\sqrt{१७५}}{२}\sqrt{-१}$$

अब यहाँ यह नहीं जान पड़ता कि $-\frac{९}{२} + \frac{\sqrt{१७५}}{२}\sqrt{-१}$ इसका क्या घनमूल होगा।

उदाहरण—(२) $य^३ - १५य - ४ = ०$

यहाँ $त = -४$ और $प = -१५$

इसलिये $-\frac{त}{२} + \sqrt{\frac{त^२}{४} + \frac{प^३}{२७}} = २ + \sqrt{४ - १२५} = २ + ११\sqrt{-१}$

इसलिये $य = (२ + ११\sqrt{-१})^{\frac{१}{३}} + (२ - ११\sqrt{-१})^{\frac{१}{३}}$

अटकल से $(२ + ११\sqrt{-१})^{\frac{१}{३}} = २ + \sqrt{-१}$

और $(२ - ११\sqrt{-१})^{\frac{१}{३}} = २ - \sqrt{-१}$

इसलिये य का एक मान $२ + \sqrt{-१} + २ - \sqrt{-१} = ४$ हुआ

दिए हुए समीकरण में य—४ का भाग देने से

$$य^२ + ४य + १ = ०$$

इस पर से य के और मान $-२+\sqrt{३}$, $-२-\sqrt{३}$ ये आ जाते हैं।

इसलिये जहां असंभाव्य का घनमूल अटकल से निकल आवे वहां पर कार्डन को रीति से य के मान आ जायंगे।

११५—यद्यपि असंभाव्य संख्या के घनमूल का ठीक ठीक पता लगाना कठिन है तथापि द्वियुक्पदसिद्धान्त से घनमूल का आसन्न मान निकाल सकते हैं। जैसे

कल्पना करो कि $अ+क\sqrt{-१}$ इसका घनमूल निकालना है तो यदि $अ > क$ तो

$$(अ+क\sqrt{-१})^{\frac{१}{३}} = अ^{\frac{१}{३}}\left(१+\frac{क}{अ}\sqrt{-१}\right)^{\frac{१}{३}}$$

$$= अ^{\frac{१}{३}}\left(१+\frac{१}{३}\cdot\frac{क}{अ}\sqrt{-१}+\frac{१}{३^२}\cdot\frac{क^२}{अ^२}\right.$$

$$\left.+\frac{५}{३^४}\frac{क^३}{अ^३}\sqrt{-१}+\cdots\cdots\cdots\right)$$

यहां $\frac{क}{अ}$ के रूपाल्प होने से आगे जाकर $\frac{क^न}{अ^न}$ यह बहुत ही छोटा होगा जिसके आगे सब पदों को स्वल्पान्तर से छोड़ सकते हैं।

यदि $अ < क$ तो

$$(अ+क\sqrt{-१})^{\frac{१}{३}} = (\sqrt{-१})^{\frac{१}{३}}\left(क+\frac{अ}{\sqrt{-१}}\right)^{\frac{१}{३}}$$

$$= -\sqrt{-१}\,(क-अ\sqrt{-१})^{\frac{१}{३}}$$

$$= -क^{\frac{१}{३}}\sqrt{-१}\left(१-\frac{अ}{क}\sqrt{-१}\right)^{\frac{१}{३}}$$

इस पर से पूर्ववत् आसन्न मान निकल आवेगा।

जैसे ११४वें प्रक्रम के (१) उदाहरण में $-\frac{९}{२}+\frac{\sqrt{१७५}}{२}\sqrt{-१}$ इसका घनमूल निकालना है तो यहां अ $= -\frac{९}{२}$, क $= \frac{\sqrt{१७५}}{२}$ और अ $<$ क इसलिये

$$\text{घनमूल } -क^{\frac{१}{३}}\sqrt{-१}\left(१-\frac{अ}{क}\sqrt{-१}\right)^{\frac{१}{३}}$$

$$= -\left(\frac{\sqrt{१७५}}{२}\right)^{\frac{१}{३}}\sqrt{-१}\left(१+\frac{९}{\sqrt{१७५}}\sqrt{-१}\right)^{\frac{१}{३}}$$

$$= -\left(\frac{\sqrt{१७५}}{२}\right)^{\frac{१}{३}}\sqrt{-१}\left(१+\frac{१}{३}\cdot\frac{९}{\sqrt{१७५}}\sqrt{-१}\right.$$

$$\left.+\frac{१}{३^{२}}\cdot\frac{८१}{१७५}-\frac{५}{३^{४}}\frac{क^{३}}{अ^{३}}\sqrt{-१}+\cdots\cdots\right)$$

कोष्ठान्तर्गत केवल चार पद लेने से

$$\text{घनमूल} = -\left(\sqrt{\frac{१७५}{२}}\right)^{\frac{१}{३}}\sqrt{-१}\left(१+\frac{३}{\sqrt{१७५}}\sqrt{-१}\right.$$

$$\left.+\frac{९}{१७५}-\frac{९^{३}}{१७५\sqrt{१७५}}\sqrt{-१}\right)$$

$$= -\left(\frac{१३\cdot२२८}{२}\right)^{\frac{१}{३}}\sqrt{-१}\left\{१+\frac{९}{१७५}+\left(\frac{३}{\sqrt{१७५}}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{९}{३५\sqrt{१७५}}\right)\sqrt{-१}\right\}$$

$$= -\left(६\cdot६१४\right)^{\frac{१}{३}}\sqrt{-१}\left(\frac{९६}{३५\times१३\cdot२२८}\sqrt{-१}+१\cdot०५१\right)$$

$$= १\cdot ६ \left(\frac{६६}{३५ \times १३\cdot २२८} - १\cdot ०५१\sqrt{-१} \right)$$

$$= १\cdot ६ \left(\cdot २०७ - १\cdot ०५१\sqrt{-१} \right)$$

$$= \cdot ३६३३ - १\cdot ०५१ \times १\cdot ६\sqrt{-१}$$

और $\cdot ३६३३ + १\cdot ०५१ \times १\cdot ६\sqrt{-१}$

$$= \left\{ -\frac{त}{२} - \sqrt{\left(\frac{त^२}{४} + \frac{प^३}{२७} \right)} \right\}^{\frac{१}{३}}$$

इसलिये $य = \left\{ -\frac{त}{२} + \sqrt{\left(\frac{त^२}{४} + \frac{प^३}{२७} \right)} \right\}^{\frac{१}{३}}$

$$+ \left\{ -\frac{त}{२} - \sqrt{\left(\frac{त^२}{४} + \frac{प^३}{२७} \right)} \right\}^{\frac{१}{३}}$$

र का पहला मान जो $\cdot ३६३३ - १\cdot ०५१ \times १\cdot ६\sqrt{-१}$ $= \cdot ३६३३ - १\cdot ६६७\sqrt{-१}$ यह आया है इसे $घा = \frac{-१ + \sqrt{-३}}{२}$ $= -\cdot ५ + \frac{\sqrt{३}}{२}\sqrt{-१} = -\cdot ५ + \cdot ८६६\sqrt{-१}$ इससे गुण देने से र का दूसरा मान $= १\cdot ५३३ + १\cdot ३३६\sqrt{-१}$।

ल के पहले आए हुए मान को $घा^२$ से गुण देने से ल का दूसरा मान $= १\cdot ५३३ - १\cdot ३३६\sqrt{-१}$।

दोनों को जोड़ देने से य का दूसरा मान ३·०६६ यह हुआ। इसमें दशमलव को छोड़ देने से य = ३, इसका उत्थापन समीकरण में देने से समीकरण ठीक हो जाता है।

इसलिये $य^3 - १२य + ९ = (य - ३)(य^2 + ३य - ३) = ०$ ।

$य^2 + ३य - ३ = ०$ ऐसा मानने से

$$य = \frac{-३ \pm \sqrt{२१}}{२} = \frac{-३ \pm ४.५८}{२} ।$$

इसलिये स्वल्पान्तर से $य = .७९$ वा $य = -.३७९$ ।

ऊपर पहले य का जो मान आया है उसमें दो ही दशमलव ग्रहण करें तो यही .७९ य का मान ठीक आता है।

पहले द्वियुक्पद सिद्धान्त से र और ल के जो आसन्न घन मूल आए हैं जिन पर से $य = .७९$ हुआ है उन्हें क्रम से घा और $घा^2$ से गुण कर दूसरे घन मूलों के मान से $य = ३$ ऐसा आया है। यदि उन्हें क्रम से $घा^2$ और घा से गुणकर जोड़ दो तो य का तीसरा मान $-.३७९$ यह आवेगा।

इस प्रकार द्वियुक्पद सिद्धान्त से असंभाव्य संख्याओं का आसन्न घनमूल जान उस पर से स्वल्पान्तर से य के मान आ सकते हैं। इसलिये व्यवहार में जहां घनमूल असम्भव संख्या में आवेगा वहां य के आसन्न मान कार्डन की रीति से जान सकते हैं।

११६—ऊपर के प्रक्रमों से जान पड़ता है कि $य^3 + पय + त = ०$ इस समीकरण में कार्डन की रीति से बिना परिश्रम य के मान आ जायँगे यदि $\frac{त^2}{४} + \frac{प^3}{२७}$ यह धन संख्या हो अर्थात् यदि प धन संख्या हो अथवा प ऋण होकर $\frac{त^2}{४} > \frac{प^3}{२७}$ ऐसा अर्थात् $२७ त^2 > ४प^3$ ऐसा हो। इन स्थितियों

में य के दो मान असंभाव्य होंगे। और यदि $\frac{२७त^२}{४}$ इससे $प^३$ का संख्यात्मक मान अल्प हो और प ऋण हो तो य के सब मान संभाव्य आवेंगे परन्तु कार्डन की रीति से य के मान निकालने में सुभीता न पड़ेगा।

यदि प ऋण हो और $\frac{त^२}{४} + \frac{प^३}{२७} = ०$ तो दिए हुए समीकरण में अव्यक्त के दो मान समान आवेंगे जैसा कि ११३वें प्रक्रम में लिख आए हैं तब ११२वें प्रक्रम से म और न के मान $\sqrt[३]{-\frac{त}{२}}$ इसके समान होंगे और य के मान क्रम से २म, −म, −म ये होंगे।

प्रत्येक स्थिति में यदि ठीक ठीक य का एक मान आ जाय तो उसको य में घटाने से जो अव्यक्तात्मक एक खण्ड होगा उससे दिए हुए समीकरण में भाग देने से जो लब्धि पूरी पूरी आवेगी उसे शून्य के समान करने से बाकी य के दो मान आ जायँगे।

११७—पूरे घन समीकरण से द्वितीय पद न रहने वाला समीकरण बनाने से अव्यक्त के मानों में पूरे घनसमीकरण के पद वश क्या स्थिति होगी इसके लिये एक प्रकार लिखते हैं।

कल्पना करो कि पूरा घनसमीकरण

$अय^३ + ३कय^२ + ३खय + ग = ०$ है।

इसमें यदि $य = व - \frac{क}{अ}$ तो इस पर से नया समीकरण

$व^३ + पव + त = ०$ ऐसा होगा जहाँ

$$प = ३\frac{ख}{अ} - \frac{३क^२}{अ^२},\quad त = \frac{ग}{अ} - \frac{३ख\cdot क}{अ^२} + \frac{२क^३}{अ^३}।$$

कार्डन की रीति से

$$व = \left\{ -\frac{त}{२} + \sqrt{\left(\frac{त^२}{४} + \frac{प^३}{२७}\right)} \right\}^{\frac{१}{३}}$$

$$+ \left\{ -\frac{त}{२} - \sqrt{\left(\frac{त^२}{४} + \frac{प^३}{२७}\right)} \right\}^{\frac{१}{३}}$$

यदि य के दो मान समान आवेंगे तो $य = व - \frac{क}{अ}$ $\therefore व = य + \frac{क}{अ}$ इस पर से स्पष्ट है कि व के भी दो मान समान होंगे।

इसलिये यहां भी ११३वें प्रक्रम से

$$\frac{त^२}{४} + \frac{प^३}{२७} = (२क^३ - ३अकख + अ^२ग)^२ + (अख - क^२)^३ = ०$$

ऐसा होगा जिसका रूपान्तर बीजगणित से

$(अग - कख)^२ - ४(क^२ - अख)(ख^२ - कग) = ०$ ऐसा होगा।

इसलिये पूरे घनसमीकरण के पदों के गुणकों में ऊपर जो स्थिति दिखाई गई है वह यदि पाई जाय तो कहेंगे कि य के दो मान समान होंगे तब फ (य) और फ′ (य) के महत्तमापवर्त्तन से य के उस समान मान को जान सकते हो।

११८—कभी कभी घनसमीकरण के पदों के गुणक इस प्रकार के होते हैं कि उन से बीजगणित की साधारण रीति से अव्यक्त का मान निकल आता है।

जैसे उदाहरण—

(१) $य^३ + ३य = अ - \frac{१}{अ}$ तो इसे

$य^३ + ३य = (अ - \frac{१}{अ})^३ - ३(अ - \frac{१}{अ})$ ऐसे लिख सकते हो।

इस पर से

$$य^3 - \left(अ - \frac{1}{अ}\right)^3 + 3\left\{य - \left(अ - \frac{1}{अ}\right)\right\} = 0$$

इसलिये य का एक मान $अ - \frac{1}{अ}$ यह हुआ।

(२) $य^3 + अय^2 + कय + ग = 0$

इसमें जानते हैं कि $3अ\cdot ग = क^2$ तो समशोधन से

$$-य^3 = अय^2 + कय + ग\ ।$$

दोनों पक्षों को $3अ\cdot क$ से गुणने से

$$-3अकय^3 = 3अ^2कग^2 + 3अक^2य + ग^3\ ।$$

दोनों पक्षों में $अ^3य^3$ के जोड़ने से

$$(अ^3 - 3अक)य^3 = अ^3य^3 + 3अ^2कय^2 + 3अक^2य + ग^3$$
$$= (अ\cdot य + ग)^3$$

घन मूल लेने से $\quad य\sqrt[3]{अ^3 - 3अ\cdot क} = अ\cdot क + ग$

$$\therefore \quad य = \frac{ग}{\sqrt[3]{अ^3 - 3अ\cdot क} - अ}\ ।$$

११९—$य^3 + पय + त = 0$ इसमें यदि प ऋण होकर $\frac{प^3}{27}$ का संख्यात्मक मान $\frac{त^2}{4}$ इससे छोटा हो वा प धन हो तो त्रिकोणमिति की युक्ति से सारणी के बल से सहज में अव्यक्त के मान जान सकते हैं। जैसे पहिले मान लो कि प धन है तो कार्डन की रीति से

$$य = \left\{-\frac{त}{2} + \sqrt{\left(\frac{त^2}{4} + \frac{प^3}{27}\right)}\right\}^{\frac{1}{3}}$$
$$+ \left\{-\frac{त}{2} - \sqrt{\left(\frac{त^2}{4} + \frac{प^3}{27}\right)}\right\}^{\frac{1}{3}}\ ।$$

इसमें मानों कि $\frac{प^3}{२७} = \frac{त^2}{४}$ स्प^{2}ष, तो इसका उत्थापन देने से

$$य = \left(-\frac{त}{२} + \frac{त}{२}\, छेष\right)^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{त}{२} - \frac{त}{२}\, छेष\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= (-त)^{\frac{1}{3}} \left\{ \left(\frac{१ - छेष}{२}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{१ + छेष}{२}\right)^{\frac{1}{3}} \right\}$$

$$= \left(\frac{-त}{कोज्या\, ष}\right)^{\frac{1}{3}} \left\{ \left(कोज्या^2 \frac{ष}{२}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(ज्या^2 \frac{ष}{२}\right)^{\frac{1}{3}} \right\}$$

$$= \left(\frac{-त}{कोज्या\, ष}\right)^{\frac{1}{3}} \left\{ कोज्या^{\frac{2}{3}} ष - ज्या^{\frac{2}{3}} ष \right\} ।$$

दूसरी स्थिति में जब प ऋण और $\frac{प^3}{२७}$ इसके संख्यात्मक मान से $\frac{त^2}{४}$ यह बड़ा है तब मान लो कि $\frac{प^3}{२७} = -\frac{त^2}{४}$ ज्या^{2}ष।

इस पर से

$$य = \left(-\frac{त}{२} + \frac{त}{२}\, कोज्या\, ष\right)^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{त}{२} - \frac{त}{२}\, कोज्या\, ष\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= (-त)^{\frac{1}{3}} \left\{ \left(कोज्या\, \frac{ष}{२}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(ज्या \frac{ष}{२}\right)^{\frac{2}{3}} \right\}$$

त्रिकोणमिति संबन्धी सारिणी से ज्या $\frac{ष}{२}$ इत्यादि के मान जान लेने से लाघव से य का मान आ जायगा।

१२०—यदि $फ(य) = (य - अ)(य - क)(य - ग) - अ'^2(य - अ) - क'^2(य - क) - ग'^2(य - ग) - २अ'क'ग' = (य - अ)\{(य - क)(य - ग) - अ'^2\} - \{क'^2(य - क) + ग'^2(य - ग) + २अ'क'ग'\} = ०$ ....(१)

तो इसमें यह सिद्ध करना है कि य के सब मान संभाव्य होंगे।

$(य-क)(य-ग)-अ'^{२}=०$ इस वर्गसमीकरण में अर्थात्

$$य^{२}-य(क+ग)+कग-अ'^{२}=०$$

इसमें य के मान

$$\frac{क+ग}{२}\pm\sqrt{\left(\frac{क+ग}{२}\right)^{२}-(कग-अ'^{२})}$$

$$=\frac{क+ग}{२}\pm\sqrt{\frac{क^{२}+२कग+ग^{२}-४कग+४अ'^{२}}{४}}$$

$$=\frac{क+ग}{२}\pm\frac{१}{२}\sqrt{(क-ग)^{२}+४अ'^{२}}$$

यहां मूलचिन्हान्तर्गत संख्या का मूल स्पष्ट है कि क−ग से अधिक आवेगा। इसलिये य का एक मान $\frac{क+ग}{२}+\frac{क-ग}{२}$ =क इससे बड़ा होगा और क से ग को बड़ा मान लिया है क्योंकि क−ग इसे धन समझते हैं। इसलिये य का एक मान क और ग दोनों से बड़ा होगा।

इस प्रकार य का दूसरा मान $\frac{क+ग}{२}-\frac{क-ग}{२}$ इससे भी छोटा होगा। इसलिये वह क और ग दोनों से छोटा होगा।

कल्पना करो कि य का बड़ा मान व और छोटा मान ज है तो फ(य) में $+\infty$, च, ज और $-\infty$ का उत्थापन देने से

फ(∞), फ(च) फ(ज) फ$(-\infty)$

$+\infty,\ -\{क'\sqrt{च-क}+ग'\sqrt{च-ग}\}^{२},$

$+\{क'\sqrt{क-ज}-ग'\sqrt{ग-ज}\}^{२},\ -\infty$

यहां तीन व्यत्यास हुए इसलिये ∞ और च के बीच अव्यक्त का एक मान जो च से बड़ा होगा दूसरा च और ज के बीच और तीसरा ज से छोटा ये तीन संभाव्य मान होंगे।

यदि च और ज तुल्य हों तो वर्ग समीकरण में मूल चिन्हान्तर्गत संख्या का नाश हो जाना चाहिए इसलिये $\text{अ}' = ०$ और $\text{क} = \text{ग}$

$$\text{तब फ}\,(\text{य}) = (\text{य} - \text{अ})\,(\text{य} - \text{क})\,(\text{य} - \text{क}) - \text{ग}'^{२}(\text{य} - \text{क})$$
$$= (\text{य} - \text{क})\,\{(\text{य} - \text{अ})\,(\text{य} - \text{क}) - \text{ग}'^{२}\} = ०$$

इसमें जो $\text{य} - \text{क} = ०$ तो $\text{य} - \text{क}$

और जो $(\text{य} - \text{अ})(\text{य} - \text{क}) - \text{ग}'^{२} = \text{य}^{२} - \text{य}(\text{अ} + \text{क}) + \text{अक} - \text{ग}'^{२} = ०$

$$\text{इससे य} = \frac{\text{अ} + \text{क}}{२} \pm \sqrt{(\text{अ} - \text{क})^{२} + ४\text{ग}'^{२}}$$

इसलिये य के तीनों मान संभाव्य हुए।

यदि च का उत्थापन देने से फ (य) शून्य के तुल्य हो तो स्पष्ट है कि फ $(\text{य}) = ०$ इसमें अव्यक्त का एक मान च है और ऊपर व्यत्यास की विधि से सिद्ध होगा कि अव्यक्त का एक मान ज से छोटा होगा। इसलिये फ $(\text{य}) = ०$ इसमें अव्यक्त के दो संभाव्य मान आने से तीसरा भी अवश्य संभाव्य होगा क्योंकि किसी समीकरण का संभाव्य मूल जोड़ा जोड़ा होगा (२६वां प्रक्रम देखो)।

१२१—इस प्रक्रम में घनसमीकरण के कुछ उदाहरण क्रिया समेत दिखलाते हैं।

(१) $\text{य}^{३} + ६\text{य} - २० = ०$ इसमें य के मान बताओ।

यहां कार्डन की रीति से प = ६, त = −२०

इसलिये $य = (१० + \sqrt{१०८})^{\frac{१}{३}} + (१० - \sqrt{१०८})^{\frac{१}{३}}$

आसन्न मान से $(१० + \sqrt{१०८})^{\frac{१}{३}} = २.७३२$ .... और
$(१० - \sqrt{१०८})^{\frac{१}{३}} = -.७३२$ ....

इसलिये य = २ इसका उत्थापन समीकरण में देने से समीकरण ठीक होता है। इसलिये य का एक मान २ यह ठीक ठहरा।

य − २ इसका समीकरण में भाग देने से $य^२ + २य + १० = ०$ यह आया। इस पर से य के और दो मान $-१ \pm ३\sqrt{-१}$ ये हुए।

यहां अटकल से ठीक ठीक $(१० + \sqrt{१०८})^{\frac{१}{३}} = १ + \sqrt{३}$ और $(१० - \sqrt{१०८})^{\frac{१}{३}} = १ - \sqrt{३}$ इसलिये दोनों का योग २ यह य का ठीक ठीक मान आता है।

(२) $य^३ - ३\sqrt[३]{२}\, य - २ = ०$ इसमें अव्यक्त के मान बताओ।

यहां त = −२, $प = -३\sqrt[३]{२}$। इन पर से

$$य = (१ + \sqrt{-१})^{\frac{१}{३}} + (१ - \sqrt{-१})^{\frac{१}{३}}$$

अब अटकल से

$$(१ + \sqrt{-१})^{\frac{१}{३}} = \frac{\sqrt{३} + १}{२\sqrt[३]{२}} + \frac{\sqrt{३} - १}{२\sqrt[३]{२}}\sqrt{-१}$$

और $(१-\sqrt{-१})^{\frac{१}{३}} = \frac{\sqrt{३}+१}{२\sqrt[३]{२}} - \frac{\sqrt{३}-१}{२\sqrt[३]{२}}\sqrt{-१}$

इसलिये

$$य = \frac{\sqrt{३}+१}{\sqrt[३]{२}}$$

और य के दो मान $\frac{१-\sqrt{३}}{\sqrt[३]{२}}, -\frac{२}{\sqrt[३]{२}}$ ये आवेंगे।

(३) १२०वें प्रक्रम में फ (य) के प्रथम खण्ड में आए हुए वर्गसमीकरण का मूल च कब फ (य) = ० इसके एक मूल के तुल्य होगा।

फ (य) के प्रथम खण्ड में आए हुए वर्गसमीकरण

$(य-क)\ (य-ग)-अ'^{२} = ०$ इसमें च का उत्थापन देने से

$$(च-क)\ (च-ग)-अ'^{२} = ० \cdots\cdots\cdots\cdots (१)$$

दूसरे खण्ड में भी च का उत्थापन देने से वह भी शून्य के तुल्य होगा क्योंकि फ (च) = ०।

इसलिये $क'^{२}(च-क) + ग'^{२}(च-ग) + २अ'क'ग' = ० \cdots\cdots (२)$

(१) से अ' का मान जान (२) में उसका उत्थापन देने से

$$क'^{२}(च-क) + ग'^{२}(च-ग) + २क'ग'\sqrt{(च-क)(च-ग)} = ०$$

इसलिये $\{क'\sqrt{(च-क)} + ग'\sqrt{(च-ग)}\}^{२} = ०$

और $\quad क'^{२}\sqrt{(च-क)} = ग'^{२}\sqrt{(च-ग)} \cdots\cdots\cdots\cdots (३)$

(२) और (३) से

$$च - क = -\frac{अ'ग'}{क'},\ च - ग = -\frac{अ'क'}{ग'} \cdots\cdots\cdots\cdots (४)$$

और $$क - \frac{अ'ग'}{क'} = ग - \frac{अ'क'}{ग'}, \cdots\cdots\cdots\cdots (५)$$

इस (५) से गुणकों की स्थिति स्पष्ट होती है।

(४) भुज और कर्ण का अन्तर, अ और क्षेत्रफल फ है तो भुज, कोटि और कर्ण का बताओ।

मान लो कि भुज = य तो कर्ण = य + अ और कोटि = $\frac{२फ}{य}$

$$भु^२ + को^२ = य^२ + \frac{४फ^२}{य^२} = \frac{य^४ + ४फ^२}{य^२} = क^२ = य^२ + २अय + अ^२$$

छेदगम और संशोधन से

$$२अय^३ + अ^२य^२ - ४फ^२ = ०$$

२अ का भाग देने से

$$य^३ + \frac{अ}{२}य^२ - \frac{२फ^२}{अ} = ० \cdots\cdots\cdots\cdots (१)$$

मान लो कि $य = व - \frac{अ}{६}$

तो $$य^३ = व^३ - \frac{अ}{२}व^२ + \frac{अ^२}{१२}व - \frac{अ^३}{२१६}$$

$$\frac{अ}{२}य^२ = \frac{अ}{२}व^२ - \frac{अ^२}{६}व + \frac{अ^३}{७२}$$

$$य^३+\frac{अ}{२}य^२-\frac{२फ^२}{अ}=व^३-\frac{अ^२}{१२}व+\frac{अ^३}{१०८}-\frac{२फ^२}{अ}=०$$

$$=व^३+पव+त=०$$

जहां यदि $प=-\frac{अ^२}{१२}$, $त=\frac{अ^३}{१०८}-\frac{२फ^२}{अ}$

अब कार्डन की रीति से व का मान जान कर उस पर से य का मान निकाल सकते हो।

(५) $अय^३+३कय^२+३खय+ग=०$

इसमें यदि य के मान $अ_१$, $अ_२$ और $अ_३$ हों और $अ_२-अ_१=अ_३-अ_२$ हो तो अ, ख, ग के रूप में क का मान निकालो।

यहां $अ_२-अ_१=अ_३-अ_२$ $\therefore$ $२अ_२=अ_१+अ_३$

और $३अ_२=अ_१+अ_२+अ_३=-\frac{३क}{अ}$ (२५वें प्रक्रम का ५वां प्रसिद्धार्थ)

$\therefore$ $अ_२=-\frac{क}{अ}$। इसलिये य का एक मान $-\frac{क}{अ}$ हुआ।

इसका उत्थापन $फ(य)=अय^३+३कय^२+३खय+ग=०$ इसमें देने से

$$\begin{array}{cccc} +अ & ३क & ३ख & ग \\ & -क & -\frac{२क^२}{अ} & -\frac{३खक}{अ}+\frac{२क^३}{अ^२} \\ \hline & २क & ३ख-\frac{२क^२}{अ}, & ग-\frac{३खक}{अ}+\frac{२क^३}{अ^२} \end{array}$$

$ग - \frac{३खक}{अ} + \frac{२क^३}{अ^२}$ यह अवश्य शून्य समान होगा। इस-लिये इसे शून्य के तुल्य कर दोनों पक्षों को $अ^२$ से गुण देने से

$$गअ^२ - ३अकख + २क^३ = ०$$

२ का भाग देने से

$$क^३ - \frac{३अख}{२}क + \frac{गअ^२}{२} = ०$$

यहां $त = \frac{गअ^२}{२}$, और $प = -\frac{३अख}{२}$ ऐसी कल्पना कर कार्डन की रीति से क के मान जान सकते हो।

(६) $य^३ + १२य = ६य^२ + ३५$ इसमें य के मान बताओ।

इस उदाहरण को भास्कराचार्य ने अपने बीजगणित में लिखा है और इसके उत्तर के लिये लिखते हैं कि ऐसे उदा-हरणों के उत्तर के लिये कोई विधि नहीं केवल अपने बुद्धि बल से कुछ जोड़ घटा कर उत्तर निकालो।

उन्होंने नीचे लिखे हुए प्रकार से उत्तर निकाला है

$$य^३ + १२य = ६य^२ + ३५$$

$६य^२ + ८$ इसको दोनों पक्षों में घटा देने से

$$य^३ - ६य^२ + १२य - ८ = २७$$

वा $(य - २)^३ = २७$

घनमूल लेने से

$$य - २ = ३ \quad \therefore \quad य = ५ ।$$

बस य का यही एक मान निकाल कर रह गए हैं। आगे कुछ भी विशेष नहीं लिखा है।

यहां एक ही पक्ष में सब पदों को ले आने से

$$य^३ - ६य^२ + १२य - ३५ = ० = फ (य)$$

इसके परिच्छिन्न मूल ले आने की युक्ति से अन्त पद को निःशेष करने वाली संख्या ५ और ७ हैं। और फ (१) = २८ यह ७ − १ = ६ इससे निःशेष नहीं होता और ५ − १ = ४ इससे निःशेष होता है इसलिये परीक्षा से परिच्छिन्न मूल केवल ५ ही है। य − ५ का फ (य) में भाग देने से

$य^२ - य + ७ = ०$। इस पर से य के और दो मान

$\frac{१ \pm \sqrt{-२७}}{२}$ ये असंभव आते हैं।

यदि यहां ३६वें प्रक्रम की रीति से दूसरा पद उड़ाने के लिये य = व + २ तो ऊपर के समीकरण में तीसरे पद के भी उड़ जाने से उसका रूप

$व^३ - २७ = ०$ ऐसा होता है जिससे व = ३

और $य = व + २ = ३ + २ = ५$।

इस पर से ऊपर की युक्ति से य के और दोनों मान आ जायँगे।

अभ्यास के लिये प्रश्न

१। $य^२ - ६य - ४ = ०$ इसमें य के मान बताओ।

२। $य^३ - ६य - २८ = ०$ इसके मूल बताओ।

३। नीचे लिखे हुए समीकरणों में य के मान बताओः—

(१) $२य^३ + ६य - ३ = ०$

(२) $३य^३ - ६य^२ - ४ = ०$

(३) $य^३ - २य = -६$

(४) $य^३ - १५य^२ - ३३य + ८४७ = ०$

(५) $य^३ + ६अय^२ = ३६अ^३$

(६) $य^३ + ६अय^२ + ३६अ^३ = ०$

(७) $य^३ - ३(अ^२ + क^२)य = २अ(अ^२ - ३क^२)$

४। यदि $य^३ + पय + त = ०$ इस पर से $य^४ = (य^२ + अय + क)^२$ ऐसा समीकरण बनता हो तो प और त का परस्पर क्या सम्बन्ध होगा। उ० $(-२प)^{\frac{३}{२}} = ८त$।

५। $य^३ + पय + त = ०$ इस पर से एक ऐसा समीकरण बनाया जाय जिसके मूल पहले समीकरण के मूलों से च तुल्य छोटे हों तो यदि $२७तच^३ - ९प^२च^२ - प^३ = ०$ तो सिद्ध करो कि नये समीकरण के मूल गुणोत्तर श्रेढी में होंगे।

६। $य^३ + पय + त = ०$ इसमें यदि अव्यक्त के दो असंभाव्य मान $अ \pm क\sqrt{-१}$ ऐसे हों तो सिद्ध करो कि $क^२ = ३अ^२ + प$

७। भुज, कोटि का अन्तर २ और जात्य त्रिभुज का क्षेत्र-फल ६ है तो भुज, कोट और कर्ण के मान बताओ।

उ० भु = ३, को = ४, क = ५।

८। $य^३ + प_१य^२ + प_२य + त = ०$ इसमें अव्यक्त के मान यदि गुणोत्तर श्रेढी में हो तो सिद्ध करो कि $तप_१^३ = प_२^३$।

९। $य^३ - य^२ + २य - ८ = ०$ इसमें य के मान बताओ।

चतुर्घात समीकरण

१२२—किसी पूरे चतुर्घात समीकरण में य के स्थान में एक ऐसे अव्यक्त का उत्थापन दे सकते हैं जिसके वश से नये समीकरण में दूसरा पद न रहे (३९वाँ प्रक्रम देखो) जैसे

$प_0 य^4 + प_1 य^3 + प_2 य^2 + प_3 य + प_4 = ०$ इस पूरे चतुर्घात समीकरण में (३९वें प्रक्रम से) यदि $य = र - \frac{प_1}{४प_0}$ तो इसके उत्थापन से अब जो र का चतुर्घात समीकरण बनेगा उसमें $र^3$ का पद उड़ जायगा। इसलिये यहां पर उस चतुर्घात समीकरण में य के मान जानने के लिये विधि लिखी जाती है जिसमें दूसरे पद का लोप हो गया है।

कल्पना करो कि किसी पूरे चतुर्घात समीकरण को

$$अ य^4 + ४क य^3 + ६ख य^2 + ४ग य + घ = ० \cdots\cdots\cdots\cdots (१)$$

ऐसा बना लिया है। इसमें यदि $य = \frac{र - क}{अ}$ तो नया समीकरण

$$र^4 + ६चा र^2 + ४जा \cdot र + अ^2 झा - ३चा^2 = ० \text{ ऐसा होगा } \cdots\cdots\cdots\cdots (२)$$

जहां $चा = अख - क^2$, $जा = अ^2 ग - ३अ क ख + २क^3$,

$झा = अघ - ४कग + ३ख^2$ ।

ऐसे द्वितीय पद रहित चतुर्घात समीकरण में अव्यक्त के मान जानने के लिये ओलर (Euler) ने कल्पना की कि

$$र = \sqrt{प} + \sqrt{ब} + \sqrt{भ}$$

वर्ग करने से

$$र^2 - प - ब - भ = २ (\sqrt{प \cdot ब} + \sqrt{प \cdot भ} + \sqrt{ब \cdot भ})$$

फिर क्रम से वर्ग और लघु करने से

$$र^४ - २(प+व+भ)र^२ - ८र\sqrt{प.व.भ} + (प+व+भ)^२ - ४(वभ+पव+पभ) = ०$$

(२) के साथ तुलना करने से

$$प+म+भ = -३चा,\ व.भ+पभ+पव = ३चा^२ - \frac{अ^२झा}{४},\ \sqrt{पवभ} = -\frac{जा}{२}$$

इस पर से एक घन समीकरण बनाने से

$$ट^३ + ३चाट^२ + \left(३चा^२ - \frac{अ^२झा}{४}\right)ट - \frac{जा^२}{४} = ०$$ ऐसा हुआ

............(३) इसमें क्रम से जो ट के मान होंगे वे क्रम से प, व और भ के मान होंगे।

(३) का थोड़ा सा रूपान्तर करने से

$$ट^३ + ३चाट^२ + ३चा^२ट + चा^३ - चा^३ - \frac{अ^२झा}{४}ट - \frac{अ^२झा}{४}चा + \frac{अ^२झा}{४}चा - \frac{जा^२}{४}$$

$$= (ट+चा)^३ - \frac{अ^२झा}{४}(ट+चा) + \frac{अ^२झा}{४}चा - चा^३ - \frac{जा^२}{४} = ०$$

इसे ४ से गुण देने से

$$४(ट+चा)^३ - अ^२झा(ट+चा) + अ^२झा चा - जा^२ - ४चा^३ = ०$$

इसमें यदि $अ^२झाचा - जा^२ - ४चा^३ = अ^३छा$

जहाँ $छा = अखघ + २कखग - अग^{२} - घक^{२} - ख^{३}$ तो समीकरण का रूप

$$४(ट + चा)^{३} - अ^{२}झा(ट + चा) + अ^{३}छा = ०$$

इसमें यदि $ट + चा = अ^{२}ष$ तो

$$४अ^{६}ष^{३} - अ^{४}झाष + अ^{३}छा = ०$$

इसमें $अ^{३}$ का भाग दे देने से

$$४अ^{३}ष^{३} - अझाष + छा = ० \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (४)$$

ऐसा घन समीकरण उत्पन्न हुआ, जिस पर से घन समीकरण की युक्ति से ष के तीनों मान व्यक्त हो जायँगे। ष के तीन मानों के वश से ट के भी तीन मान आवेंगे

क्योंकि $ट + चा = ट - क^{२} + अख = अ^{२}ष$

$$\therefore ट = क^{२} - अख + अ^{२}ष$$

यदि ष के तीन मान क्रम से $ष_{१}$, $ष_{२}$ और $ष_{३}$ मान लो तो

$$प = क^{२} - अख + अ^{२}ष_{१}$$
$$ब = क^{२} - अख + अ^{२}ष_{२}$$
$$भ = क^{२} - अख + अ^{२}ष_{३}$$

इन पर से

$$र = \sqrt{क^{२} - अख + अ^{२}ष_{१}} + \sqrt{क^{२} - अख + अ^{२}ष_{२}} + \sqrt{क^{२} - अख + अ^{२}ष_{३}}$$

मूल चिन्हान्तर्गत संख्याओं के धन, ऋण के वश से दो दो प्रकार के मूल आवेंगे इस लिये सब धन मूलों के लेने से एक, सब ऋण मूलों के लेने से एक, एक ऋण, दो दो धन लेने से तीन, एक धन, दो दो ऋण लेने से तीन, इस तरह से र के आठ मान आवेंगे। इन पर से य के

भी आठ मान आवेंगे परन्तु चतुर्घात समीकरण होने से य के चार ही मान आने चाहिए। इसलिये तीनों मूलों को ऐसा ग्रहण करना चाहिये जिसमें $\sqrt{प \cdot ब \cdot भ} = -\frac{जा}{२}$ यह समीकरण सत्य हो। क्योंकि वर्ग कर देने से $प \cdot ब \cdot भ = \frac{जा^२}{४}$ इसमें वास्तव चिन्ह के लुप्त हो जाने से ऊपर आठ मान आ गए हैं।

अब $\sqrt{प \cdot बभ} = -\frac{जा}{२}$ इसके वश से मानों को चुन लेने से

$$\sqrt{प \cdot बभ} = \sqrt{प}(-\sqrt{ब})(-\sqrt{भ}) =$$
$$\sqrt{ब}(-\sqrt{प})(-\sqrt{प}) = \sqrt{भ}(-\sqrt{प})(-\sqrt{ब})$$
$$= \sqrt{प}\sqrt{ब}\sqrt{भ}$$

यदि $\sqrt{प}, \sqrt{ब}, \sqrt{भ}$ ये समग्र कर्म में अपने एक ही चिन्ह के साथ हों तो ये चार स्थितिआँ होंगी।

अथवा $\sqrt{प}\sqrt{ब}\sqrt{भ} = -\frac{जा}{२}$ इससे $\sqrt{भ} = -\frac{जा}{२\sqrt{पब}}$

यह जान कर $र = \sqrt{प} + \sqrt{ब} - \frac{जा}{२\sqrt{प}\sqrt{ब}}$

अब इस पर से निःसंशय र के चार मान आ जायंगे।

दोनों मूलों को धन लेने से एक, ऋण लेने से एक, पहला धन, दूसरा ऋण लेने से एक, और पहला ऋण, दूसरा धन लेने से एक, यों र के चार मान होंगे जिनके वश से य के भी चार मान आ जायंगे।

र के चार मान यदि $र_१$, $र_२$, $र_३$, $र_४$ क्रम से ये हैं तो र के चतुर्घात समीकरण में $र^३$ के पद के न रहने से स्पष्ट है कि

$$र_१ + र_२ + र_३ + र_४ = ०$$

और ऊपर की युक्ति से

$$र_१ = \sqrt{प} + \sqrt{ब} - \frac{जा}{२\sqrt{प}\sqrt{ब}}$$

$$र_२ = -\sqrt{प} - \sqrt{ब} - \frac{जा}{२\sqrt{प}\sqrt{ब}}$$

$$र_३ = -\sqrt{प} + \sqrt{ब} + \frac{जा}{२\sqrt{प}\sqrt{ब}}$$

$$र_४ = \sqrt{प} - \sqrt{ब} + \frac{जा}{२\sqrt{प}\sqrt{ब}}$$

इन पर से

$$र_२ + र_३ = -२\sqrt{प},\ र_१ + र_४ = २\sqrt{प}$$

$$\therefore (र_२ + र_३)^२ = (र_१ + र_४)^२ = ४प$$

इसी प्रकार $(र_३ + र_१)^२ = (र_२ + र_४)^२ = ४ब$

$$(र_१ + र_२)^२ = (र_३ + र_४)^२ = ४भ$$

इन पर से भी $र_१$, $र_२$, $र_३$, $र_४$ ये $\sqrt{प} + \sqrt{ब}, \sqrt{भ}$ इनके रूप में आ जायंगे।

यदि दिए हुए चतुर्घात समीकरण में य के मान $अ_१$, $अ_२$, $अ_३$, $अ_४$ हों तो (१) समीकरण में $र = अय + क$। इसलिये य के चारो मानों का उत्थापन य के स्थान में और र के चारो मानों का उत्थापन र के स्थान में देने से

$$\left.\begin{array}{l} \text{अ}\,\text{अ}_{१} + \text{क} = \sqrt{\text{प}} - \sqrt{\text{ब}} - \sqrt{\text{भ}} \\ \text{अ}\,\text{अ}_{२} + \text{क} = -\sqrt{\text{प}} + \sqrt{\text{ब}} - \sqrt{\text{भ}} \\ \text{अ}\,\text{अ}_{३} + \text{क} = -\sqrt{\text{प}} - \sqrt{\text{ब}} + \sqrt{\text{भ}} \\ \text{अ}\,\text{अ}_{४} + \text{क} = \sqrt{\text{प}} + \sqrt{\text{ब}} + \sqrt{\text{भ}} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (५)$$

इन पर से प, ब, भ के मान

$$\left.\begin{array}{l} \text{प} = \frac{\text{अ}^{२}}{१६}\left(\text{अ}_{२} + \text{अ}_{३} - \text{अ}_{१} - \text{अ}_{४}\right)^{२} \\ \text{ब} = \frac{\text{अ}^{२}}{१६}\left(\text{अ}_{३} + \text{अ}_{१} - \text{अ}_{२} - \text{अ}_{४}\right)^{२} \\ \text{भ} = \frac{\text{अ}^{२}}{१६}\left(\text{अ}_{१} + \text{अ}_{२} - \text{अ}_{३} - \text{अ}_{४}\right)^{१} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (६)$$

(५) में दो दो का अन्तर कर आपस में गुण देने से और प, ब, भ के रूप $\text{ष}_{१}$, $\text{ष}_{२}$, $\text{ष}_{३}$ इनके रूप में बनाने से

$$\left.\begin{array}{l} ४(\text{ब} - \text{भ}) = ४\text{अ}^{२}(\text{ष}_{२} - \text{ष}_{३}) = -\text{अ}^{२}(\text{अ}_{२} - \text{अ}_{३})(\text{अ}_{१} - \text{अ}_{४}) \\ ४(\text{भ} - \text{प}) = ४\text{अ}^{२}(\text{ष}_{३} - \text{ष}_{१}) = -\text{अ}^{२}(\text{अ}_{३} - \text{अ}_{१})(\text{अ}_{२} - \text{अ}_{४}) \\ ४(\text{प} - \text{ब}) = ४\text{अ}^{२}(\text{ष}_{१} - \text{ष}_{२}) = -\text{अ}^{२}(\text{अ}_{१} - \text{अ}_{२})(\text{अ}_{३} - \text{अ}_{४}) \end{array}\right\} \cdots (७)$$

(४) में दूसरे पद के न रहने से $\text{ष}_{१} + \text{ष}_{२} + \text{ष}_{३} = ०$
इसलिये (७) में परस्पर घटाने से

$$\left.\begin{array}{l} १२\text{ष}_{१} = (\text{अ}_{३} - \text{अ}_{१})(\text{अ}_{२} - \text{अ}_{४}) - (\text{अ}_{१} - \text{अ}_{२})(\text{अ}_{३} - \text{अ}_{४}) \\ १२\text{ष}_{२} = (\text{अ}_{१} - \text{अ}_{२})(\text{अ}_{३} - \text{अ}_{४}) - (\text{अ}_{२} - \text{अ}_{३})(\text{अ}_{१} - \text{अ}_{४}) \\ १२\text{ष}_{३} = (\text{अ}_{२} - \text{अ}_{३})(\text{अ}_{१} - \text{अ}_{४}) - (\text{अ}_{३} - \text{अ}_{१})(\text{अ}_{२} - \text{अ}_{४}) \end{array}\right\} \cdots (८)$$

इस प्रकार (५),(६),(७) और (८) से आपस के सब प्रकार के सम्बन्ध जान पड़ते हैं।

(३) समीकरण को ओलर का घनसमीकरण कहते हैं और (४) को अपवर्त्तित घनसमीकरण कहते हैं।

ऊपर के समीकरणों की व्याप्ति के लिये कुछ उदाहरण क्रिया समेत दिखलाते हैं।

उदाहरण—(१) $आ_० य^४ + ६आ_२ य^२ + ४आ_३ य + आ_४ = ०$

और $आ_० य^४ + ६आ_२ य^२ - ४आ_३ य + आ_४ = ०$

इन दोनों पर से अपवर्त्तित घन समीकरण एक ही होगा।

यहां स्पष्ट है कि पहले समीकरण में $जा = आ_३$ और दूसरे समीकरण में $जा = -आ_३$ इसलिये $जा^२$ का मान दोनों में एक ही होगा और अवर्त्तित घन समीकरण में व्यक्ताङ्क के मान में $जा^२$ आता है। इसलिये दोनों समीकरणों पर से अपवर्त्तित घनसमीकरण एक ही होगा।

(२) $य^४ - ६द य^२ \pm ८य\sqrt{द^३ + म^३ + न^३ - ३दमन}$
$+ ३(४मन - द^२) = ०$

इस पर से अपवर्त्तित घनसमीकरण बनाओ।

यहां दिए हुए समीकरण के रूप से

$चा = -द,\ जा = \pm २\sqrt{द^३ + म^३ + न^३ - ३दमन}$

और $अ^२झा - ३चा^२ = ३(४मन - द^२)$

$\therefore\quad अ^२झा = १२मन - ३द^२ + ३चा^२$

$= १२मन$

इन पर से $अ^२झा\, चा - जा^२ - ४चा^३$

$= अ^३छ$

$= -$ अ^2 झाद $- 4$द$^3 - 4$म$^3 - 4$न$^3 + 12$दमन $+ 4$द^3

$= - 12$दमन $- 4$द$^3 - 4$म$^3 - 4$न$^3 + 12$दमन $+ 4$द^3

$= -4($म$^3 +$ न$^3)$, अ $= 1$ ऐसा मान लेने से।

इनका उत्थापन अपर्त्तित घनसमीकरण में देने से और ४ का अपर्त्तन देने से

$$\text{ष}^3 - 3\text{मनष} - (\text{म}^3 + \text{न}^3) = 0$$ ऐसा हुआ।

(३) $\{ \text{य}^4 - 6\text{दय}^2 + 3\ (4\text{मन} - \text{द}^2)\}^2$
$= 64\ (\text{द}^3 + \text{म}^3 + \text{न}^3 - 3\text{मन})\text{य}^2$

इसमें य के मान बताओ।

यह समीकरण अष्ट घात का है, इसलिये य के आठ मान आवेंगे। और दोनों पक्षों के मूल लेने से जो चतुर्घात समीकरण होगा उसमें य के चार मान आवेंगे। मूल लेकर सब पदों को बाईं ओर ले जाने से समीकरण का रूप

$$\text{य}^4 - 6\text{दय}^2 \pm 8\text{य}\sqrt{\text{द}^3 + \text{म}^3 + \text{न}^3 - 3\text{दमन}} + 3(4\text{मन} - \text{द}^2) = 0$$

ऐसा होगा।

यह ठीक (२) उदाहरण के ऐसा हो गया। इसलिये इस पर से अपवर्त्तित घनसमीकरण

$$\text{ष}^3 - 3\text{मनष} - (\text{म}^3 + \text{न}^3) = 0$$

कार्डन की रीति से $\text{त} = -(\text{म}^3 + \text{न}^3)$, $\text{प} = -3\text{मन}$

इन पर से $\text{र} = \left\{ -\frac{\text{त}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\text{त}^2}{4} + \frac{\text{प}^3}{27}\right)} \right\}^{\frac{1}{3}} = \text{म}$

और $\text{ल} = \left\{ -\frac{\text{त}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\text{त}^2}{4} + \frac{\text{प}^3}{27}\right)} \right\}^{\frac{1}{3}} = \text{न}$

इसलिये $ष_1 = म + न,\ ष_2 = घाम + घा^2न,\ ष_3 = घा^2म + घान$

और $य = \sqrt{द + म + न} + \sqrt{द + घाम + घा^2न} + \sqrt{द + घा^2म + घान}$

मूलों के धन, ऋण चिन्हों के वश से य के आठ मान आ जायंगे।

(४) $र^4 + ६चा \cdot र^2 + ४जा \cdot र + अ^2 झा - ३चा^2 = ०$ इसमें यदि र का एक मान

$$\sqrt{द + म + न} + \sqrt{द + घाम + घा^2न} + \sqrt{द + घा^2म + घान}$$

यह हो तो चा, झा और छ के मान बताओ।

(३) उदाहरण की युक्ति से यहां अपवर्त्तित घन समीकरण

$ष^3 - ३मनष - (म^3 + न^3) = ०$ ऐसा होगा।

(२) उदाहरण की युक्ति से अ = १ ऐसा मान लेने से

$चा = -द,\ झा = १२मन,\ छ = -४(म^3 + न^3)$।

(५) यदि चतुर्घात समीकरण में अव्यक्त के दो मान संभाव्य और दो मान असंभाव्य हों तो सिद्ध करो कि ओलर के घनसमीकरण में अव्यक्त का एक संभाव्य घन मान होगा और दो असंभाव्य मान होंगे।

९वाँ समीकरण जो पहिले लिख आए हैं उससे स्पष्ट है कि ऐसी स्थिति में ओलर के समीकरण में अव्यक्त का एक मान धन [illegible]भाव्य होगा और दो असंभाव्य। विचारने में यह बात मान ल[illegible] है कि चतुर्घात समीकरण के दोनों संभाव्य मूल आपस में तुल्य नहीं हैं। तुल्य मानने से व्यभिचार हो जायगा। ९वें समीकरण से इतनी बातें सिद्ध होती हैं।

यदि ओलर के घनसमीकरण में अव्यक्त के सब मान धन संभाव्य हों तो चतुर्घात समीकरण में अव्यक्त के सब मान संभाव्य होंगे।

यदि ओलर के घनसमीकरण में अव्यक्त के सब संभाव्य मान ऋण हों तो चतुर्घात समीकरण में अव्यक्त के सब मान असंभाव्य होंगे। और यदि ओलर के घनसमीकरण में अव्यक्त के दो असंभाव्य मान हों तो चतुर्घात समीकरण में अव्यक्त के दो मान संभाव्य और दो मान असंभाव्य होंगे।

अभ्यास के लिये प्रश्न।

१। यदि जा = ० और छ = ० तो चतुर्घात समीकरण में अव्यक्त मान कैसे आवेंगे।

२। यदि चतुर्घात समीकरण में अव्यक्त के दो मान समान हों तो सिद्ध करो कि अपवर्त्तित घन समीकरण में भी अव्यक्त के दो मान समान आवेंगे।

३। यदि चतुर्घात समीकरण में अव्यक्त के तीन मान समान हों तो सिद्ध करो कि अपवर्त्तित घन समीकरण में अव्यक्त के सब मान शून्य होंगे। इस दशा में झा = ०, छ = ० होगा।

४। यदि चतुर्घात समीकरण के दो दो मूल समान हों तो सिद्ध करो कि ओलर के घन समीकरण के दो मूल शून्य होंगे और ज और १२चा^{२} − अ^{२}झा ये भी शून्य होंगे।

५। सिद्ध करो कि यदि चतुर्घात समीकरण के सब मूल संभाव्य वा असंभाव्य हों तो अपवर्त्तित घनसमीकरण के

सब मूल संभाव्य होंगे। और इसका विपरीत यदि अपवर्त्तित घन समीकरण के सब मूल संभाव्य हों तो चतुर्घात समीकरण के सब मूल संभाव्य वा असंभाव्य होंगे।

६। यदि चतुर्घात समीकरण में अव्यक्त के दो मान संभाव्य और दो मान असंभाव्य हों तो सिद्ध करो कि अपवर्त्तित घन समीकरण में अव्यक्त के दो मान असंभाव्य होंगे। और यदि अपवर्त्तित घनसमीकरण में अव्यक्त के दो मान असंभाव्य होंगे तो चतुर्घात समीकरण में अव्यक्त के दो मान संभाव्य और दो मान असंभाव्य होंगे।

७। यदि चा धन होगा तो चतुर्घात समीकरण में अव्यक्त के असंभव मान अवश्य होंगे।

८। यदि झा ऋण होगा तो चतुर्घात समीकरण में अव्यक्त के दो मान संभाव्य और दो मान असंभाव्य होंगे।

९। यदि चा और छ दोनों धन हों तो चतुर्घात समीकरण में अव्यक्त के सब मान असंभव होंगे।

१०। सिद्ध करो कि यदि चतुर्घात समीकरण में अव्यक्त के मान $अ_{१}$, $अ_{२}$, $अ_{३}$ और $अ_{४}$ हों तो $अ^{६} (अ_{२} - अ_{३})^{२} (अ_{३} - अ_{१})^{२} (अ_{१} - अ_{२})^{२} (अ_{१} - अ_{४})^{२} (अ_{२} - अ_{४})^{२} (अ_{३} - अ_{४})^{२} = २५६ (झा^{३} - २७छ^{२})$। १२२वें प्रक्रम में दिए हुए (७)वें समीकरण से और ४१वें प्रक्रम के दूसरे उदाहरण के अन्त में जो समीकरण का लघुतम रूप है उससे यह प्रश्न सिद्ध हो जाता है।

१२३—ओलर के घनसमीकरण में प, ब और भ के जो मान आते हैं जिनके वश से पहले र के आठ मान आ जाते हैं,

फिर विचार करने से चार मान अशुद्ध ठहरते हैं और चार ठीक उनके जानने के लिये और भी कई एक प्रकार हैं जिनसे बिना संशय र के चार मान आ जाते हैं। पिछले प्रक्रम में जो प्रकार लिख आए हैं उनसे बुद्धिमान अनेक कल्पना कर सकता है, इसलिये व्यर्थ ग्रंथ बढ़ाना नहीं चाहते। अब चतुर्घात समीकरण को दो वर्ग समीकरणों के गुण्य गुणक रूप खण्डों में कैसे ले जाना होता है इसके लिये दो प्रकार दिखला कर यह अध्याय समाप्त किया जाता है।

प्रकार—(१) कल्पना करो कि

$$\text{अय}^{४} + \text{४कय}^{३} + \text{६खय}^{२} + \text{४गय} + \text{घ} = \text{०}$$

इसका रूपान्तर

$$(\text{अय}^{२} + \text{२कय} + \text{ख} + \text{२अष})^{२} - (\text{२मा}\cdot\text{य} + \text{ना})^{२}$$

ऐसा होता है।

दिए हुए समीकरण को अ से गुण कर इसके साथ समीकरण के रूपान्तर की तुलना करने से

$$\text{मा}^{२} = \text{क}^{२} - \text{अख} + \text{अ}^{२}\text{ष},\quad \text{ना}^{२} = (\text{ख} + \text{२अष})^{२} - \text{अघ}$$

$$\text{माना} = \text{कख} - \text{अग} + \text{२अकष}$$

$\text{मा}^{२}$ को $\text{ना}^{२}$ से गुण कर उसमें माना का वर्ग घटा देने से

$$\text{४अ}^{२}\text{ष}^{२} - (\text{अघ} - \text{४कग} + \text{३ख}^{२})\text{अष} + \text{अखघ} + \text{२खगक} - \text{अग}^{२} - \text{घक}^{२} - \text{ख}^{३} = \text{०}$$

यह पिछले प्रक्रम का वही अपवर्त्तित घन समीकरण बन जाता है।

इस पर से ष के तीन मान $\text{ष}_{१}$, $\text{ष}_{२}$ और $\text{ष}_{३}$ मिलेंगे फिर उनसे $\text{मा}^{२}$, मा·ना और $\text{ना}^{२}$ भी व्यक्त हो जायंगे जिनसे मा और ना के मान भी जान सकते हो।

इस युक्ति से चतुर्घात समीकरण का

$$(\text{अय}^2 + 2\text{कय} + \text{ख} + 2\text{अष})^2 - (2\text{मा}\cdot\text{य} + \text{ना})^2$$
$$= \{ \text{अय}^2 + 2(\text{क} - \text{मा})\text{य} + \text{ख} + 2\text{अष} - \text{ना} \}$$
$$\{ \text{अय}^2 + 2(\text{क} + \text{मा})\text{य} + \text{ख} + 2\text{अष} + \text{ना} \} = 0$$

इसमें ष के स्थान में $\text{ष}_1, \text{ष}_2, \text{ष}_3$ का उत्थापन देने से तीन जोड़े वर्गसमीकरण के गुण्य गुणक रूप खण्ड होंगे।

चतुर्घात समीकरण में य के जो मान अ_1, अ_2, अ_3 और अ_4 ये हैं उनमें मान लो कि पहले एक जोड़े वर्गसमीकरण से क्रम से अ_2, अ_3 और अ_1, अ_4 दूसरे जोड़े से अ_3, अ_1 और अ_2, अ_4 और तीसरे जोड़े से अ_1, अ_2 और अ_3, अ_4 ये मान आए तो २५वें प्रक्रम के ५वें प्रसिद्धार्थ से

$$\text{अ}_2 + \text{अ}_3 = -\frac{2}{\text{अ}} (\text{क} - \text{मा}_1),\ \text{अ}_3 + \text{अ}_1 = -\frac{2}{\text{अ}} (\text{क} - \text{मा}_2),$$
$$\text{अ}_1 + \text{अ}_2 = -\frac{2}{\text{अ}} (\text{क} - \text{मा}_3),$$

$$\text{अ}_1 + \text{अ}_4 = -\frac{2}{\text{अ}} (\text{क} + \text{मा}_1),\ \text{अ}_2 + \text{अ}_4 = -\frac{2}{\text{अ}} (\text{क} + \text{मा}_2),$$
$$\text{अ}_3 + \text{अ}_4 = -\frac{2}{\text{अ}} (\text{क} + \text{मा}_3),$$

जहां $\text{मा}_1 = \sqrt{\text{क}^2 - \text{अख} + \text{अ}^2\text{ष}_1}$,

$$\text{मा}_2 = \sqrt{\text{क}^2 - \text{अख} + \text{अ}^2\text{ष}_2},$$
$$\text{मा}_3 = \sqrt{\text{क}^2 - \text{अख} + \text{अ}^2\text{ष}_3}$$

दो दो समीकरणों को परस्पर घटाने से

$$अ_2 + अ_3 - अ_1 - अ_4 = ४\frac{मा_1}{अ}, \quad अ_3 + अ_1 - अ_2 - अ_4 = ४\frac{मा_2}{अ},$$

$$अ_1 + अ_2 - अ_3 - अ_4 = ४\frac{मा_3}{अ}$$

और दिए हुए चतुर्घात समीकरण पर से

$$अ_1 + अ_2 + अ_3 + अ_4 = -४\frac{क}{अ}$$

इसलिये

$$अअ_1 + क = -मा_1 + मा_2 + मा_3$$
$$अअ_2 + क = मा_1 - मा_2 + मा_3$$
$$अअ_3 + क = मा_1 + मा_2 - मा_3$$
$$अअ_4 + क = -मा_1 - मा_2 - मा_3$$

इसकी तुलना १२२वें प्रक्रम के (५) समीकरण से करने में स्पष्ट होता है कि ओलर के घनसमीकरण में जो प, ब, भ हैं वे क्रम से $मा_1^2$, $मा_2^2$, $मा_3^2$ इनके समान हैं।

$४\frac{मा_1}{अ}$, $४\frac{मा_2}{अ}$ इत्यादि को परस्पर गुण देने से

$अ^3$ $(अ_2 + अ_3 - अ_1 - अ_4)$ $(अ_3 + अ_1 - अ_2 - अ_4)$ $(अ_1 + अ_2 - अ_3 - अ_4) = ६४\, मा_1 मा_2 मा_3$ ऐसा होगा।

फिर १२२वें प्रक्रम के (५) समीकरण से

$$अ\cdot अ_4 + क = \sqrt{प} + \sqrt{ब} + \sqrt{भ} = -मा_1 - मा_2 - मा_3$$

इसलिये $\sqrt{प}\sqrt{ब}\sqrt{भ} = -मा_1 मा_2 मा_3 = -\frac{जा}{२}$

$$\therefore मा_1, मा_2, मा_3 = \frac{जा}{२}$$

इस पर से $मा_1$, $मा_2$, $मा_3$ इनका कैसा चिन्ह ग्रहण करना चाहिए इसका भी विचार कर सकते हैं।

पिछले समीकरण से $मा_3 = \frac{जा}{२मा_1 . मा_2}$

इसलिये य के मान जानने के लिये केवल

$अय + क = मा_1 + मा_2 - \frac{जा}{२मा_1 मा_2}$ ऐसा समीकरण बना सकते हैं

$मा_1 = \sqrt{क^2 - अख + अ^2 ष_1}$ और $मा_2 = \sqrt{क^2 - अ·ख + अ^2 ष_2}$

इन पर से $मा_1$ और $मा_2$ के धन और ऋण मान लेने से ऊपर अय + क में परस्पर उत्थापन देने से चतुर्घात समीकरण में य के चार मान आ जायंगे।

दो राशिओं के वर्गान्तर के रूप में जो चतुर्घात समीकरण ऊपर बनाया गया है वह बहुतों के मत से फेररी (Ferrari) और बहुतों के मत से सिम्पसन् (Simpson) की कल्पना है।

प्रकार—(२) कल्पना करो कि

$$अय^4 + ४कय^3 + ६खय^2 + ४गय + घ = ०$$

इस चतुर्घात समीकरण का रूप

$अ (य^2 + २पय + त) (य^2 + २प'य + त')$ यदि ऐसा है तो दोनों खण्डों को गुणने से और दिए हुए समीकरण के साथ तुलना करने से

$$प + प' = २\frac{क}{अ},\ त + त' + ४पप' = ६\frac{ख}{अ},\ पत' + प'त = २\frac{ग}{अ}$$

$$तत' = \frac{घ}{अ} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (१)$$

अब इन चारो समीकरणों से यदि पाचवां समीकरण

$प प' = फि$, वा $त + त' = फि$ ऐसा बन जावे तो $प, प', त$ और $त'$ इनके मान व्यक्त हो जायँगे।

यदि $फि = \frac{ख}{अ} - प प' = \frac{१}{४}\left(त + त' - \frac{२ख}{अ}\right)$ ऐसा मानो तो बहुत सुभीता पड़ेगा।

(१) समीकरण से यहां

$$प त + प' त' = \frac{४ अ क ख - २ अ^२ ग}{अ^२} + \frac{८ क फि}{अ}$$

और $(प^२ + त^२)(प'^२ + त'^२) = (प त' - प' त)^२ + (प त + प' त')^२$

इस सरूप समीकरण से

$$४ अ^२ फि^३ - अ झा फि + छा = ०$$

ऐसा अपवर्त्तित घन समीकरण बन जायगा।

इस प्रकार से फि के मान से $प प'$ और $त + त'$ व्यक्त हो जायंगे। फिर (१) समीकरण से $प, त, प', त'$ सब व्यक्त हो जायंगे।

(१) प्रकार में जो दो वर्गसमीकरण उत्पन्न हुए हैं उनसे स्पष्ट है कि

$$अ_२ \, अ_३ = \frac{ख + २ अ ष_१ - ना}{अ}$$

$$अ_१ \, अ_४ = \frac{ख + २ अ ष_१ + ना}{अ}$$

$$\therefore अ_२ अ_३ + अ_१ अ_४ = ४ ष_१ + \frac{२ख}{अ}।$$

और (२) प्रकार में वर्गसमीकरण के जो खण्ड हैं उनसे

$४पप' =$ दो दो मानों के योग का घात। इसे दो दो मानों के घात $\frac{६ख}{अ}$ में घटा देने से

$$अ_२अ_३ + अ_२अ_४ = \frac{६ख}{अ} - ४पप'$$

$$= \frac{६ख}{अ} - \frac{४ख}{अ} + ४फि$$

$$= ४फि_१ + \frac{२ख}{अ}$$

इसलिये (१) प्रकार में जो प है वही (२) प्रकार में फि है।

इस पर से यह भी सिद्ध होता है कि प पर से जैसा अपवर्त्तित घन समीकरण बनता है वैसा ही फि पर से भी बनेगा।

१२४—$य^४ + ६चाय^२ + ४जाय + अ^२झा - ३चा^२ = ०$

इस चतुर्घात समीकरण का यदि

$$(य^२ + २पय + त)\ (य^२ - २पय + त')$$

ऐसा रूपान्तर करें तो इनके घात को दिए हुए समीकरण के साथ तुलना करने से

$त + त' - ४प^२ = ६चा,\ २प(त' - त) = ४जा,\ तत' = अ^२झा - ३चा^२$

अर्थात्

$त + त' = ६चा + ४प^२,\ त' - त = \frac{४जा}{२प},\ तत' = अ^२झा - ३चा^२$

प के रूप में पहले दो समीकरणों से

$$त = \frac{६चा + ४प^२ - \frac{४जा}{२प}}{२},\quad त' = \frac{६चा + ४प^२ + \frac{४जा}{२प}}{२}$$

$$\therefore\ तत' = \left(\frac{६चा + ४प^२ - \frac{४जा}{२प}}{२}\right)\left(\frac{६चा + ४प^२ + \frac{४जा}{२प}}{२}\right)$$

$$= अ^२झा - ३चा^२$$

इस पर से

$$६४प^६ + १६ \times १२चाप^४ + ४\,(३६चा^२ - ४अ^२झा + १२चा^२)प^२ - १६जा^२ = ०$$

वा $४प^६ + १२चाप^४ + (१२चा^२ - अ^२झा)प^२ - जा^२ = ०$

इसमें यदि $अ^२फि = प^२ + च = \frac{१}{४}\,(त + त' - २चा)$ इसका उत्थापन दो और $अ^२$ का भाग दे दो तो वही अपवर्तित घन समीकरण

$४अ^३फि^३ - अझाफि + छा = ०$ ऐसा हो जायगा।

इस पर से भी ऊपर की युक्ति से य के मान व्यक्त हो जायंगे। यह डिकार्टिस की कल्पना है।

१२५—$अय^४ + ४कय^३ + ६खय^२ + ४गय + घ = ०$

इसमें यदि $य = जर + थ$ तो समीकरण का रूप

$$अज^४र^४ + ४स_१ज^३र^३ + ६स_२ज^२र^२ + ४स_३जर + स_४ = ०$$

जहां $स_१ = अथ + क$, $स_२ = अथ^२ + २कथ + ख$, $स_३ = अथ^३ + ३कथ^२ + ३खथ + ग$। अब यदि यह हरात्मक समीकरण हो तो ७६वें प्रक्रम से

$$अ ज^४ = स_४,\ स_१ ज^२ = स_३ ज$$

इन पर से $\frac{स_३}{स_१} = ज^२$ और $\frac{अ स_३^२}{स_१^२} = स_४$

$$\therefore\ अ स_३^२ - स_१^२ स_४ = ०$$

और $ज^२ = \frac{स_३}{स_१} = \frac{अ थ^३ + ३ क थ^२ + ३ ख थ + ग}{अ थ + क}$

इस पर से ज के विरुद्ध चिन्ह के दो मान आवेंगे।

१२६—यदि किसी न घात के समीकरण को

$$स_न = अ_० य^न + न अ_१ य^{न-१} + \frac{न(न-१)}{२!} अ_२ य^{न-२} + \cdots\cdots + न अ_{न-१} य + अ_न \cdots\cdots (१)$$

इस प्रकार से लिखें और यदि न के स्थान में न — १ इसका उत्थापन दें तो पूर्व संकेत से

$$स_{न-१} = अ_० य^{न-१} + (न-१) अ_१ य^{न-२} + \cdots + (न-१) अ_{न-२} य + अ_{न-१}$$

....

$$स_३ = अ_० य^३ + ३ अ_१ य^२ + ३ अ_२ य + अ_३$$
$$स_२ = अ_० य^२ + २ अ_१ य + अ_२$$
$$स_१ = अ_० य + अ_१$$
$$स_० = अ_० ।$$

$स_न$ का प्रथमोत्पन्न फल बनाओ तो

$$न \left\{ अ_० य^{न-१} + (न-१) अ_१ य^{न-२} + \frac{(न-१)(न-२)}{२!} अ_२ य^{न-३} + \cdots\cdots + अ_{न-१} \right\}$$

$= न स_{न-१}$ ऐसा होता है।

यदि (१) में य के स्थान में र + च का उत्थापन दें तो

$$स_न = आ_० र^न + नआ_१ र^{न-१} + \frac{न(न-१)}{२!} आ_२ र^{न-२} + \ldots\ldots + नआ_{न-१} र + आ$$

जहां $फ(च) = आ_न$, $फ'(च) = न\, आ_{न-१}$

और
$$आ_० = अ_०$$
$$आ_१ = अ_० च + अ_१$$
$$आ_२ = अ_० च^२ + २अ_१ च + अ_२$$
$$\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

अब यदि ऊपर के समीकरण में $र^{न-१}$ पद का लोप करना हो तो

$$आ_१ = अ_० च + अ_१$$
$$\therefore च = -\frac{अ_१}{अ_०}$$

इसका उत्थापन $आ_२$, $आ_३$,......इत्यादि में देने से

$$आ_२ = अ_० \left(-\frac{अ_१}{अ_०}\right)^२ + २अ_१ \left(-\frac{अ_१}{अ_०}\right) + अ_२$$
$$= \frac{अ_० अ_२ - अ_१^२}{अ_०}$$

$$आ_३ = अ_० \left(-\frac{अ_१}{अ_०}\right)^३ + ३अ_१ \left(-\frac{अ_१}{अ_०}\right)^२ + ३अ_२ \left(-\frac{अ_१}{अ_०}\right) + अ_३$$
$$= \frac{अ_०^२ अ_३ - ३अ_० अ_१ अ_२ + २अ_१^३}{अ_०^२}$$

इस प्रकार से आ$_{१}$, आ$_{२}$, आ$_{३}$ इत्यादि के मान लाघव से जान सकते हो।

१२७—१२५वें प्रक्रम में अ स$_{३}^{२}$ — स$_{१}^{२}$स$_{४}$ = ० जो यह लिखा गया है इसमें स$_{३}$ और स$_{४}$ के मान स$_{१}$ और व्यक्ताङ्कों के रूप में लाकर उत्थापन देने से

$$२जा स_{१}^{३} + (अ^{२}झा — १२चा^{२}) स_{१}^{२} — ६जा चा स_{१} — जा^{२} = ० \cdots (१)$$

ऐसा होगा क्योंकि

$$स_{१} = अथ + क$$

$$स_{२} = अथ^{२} + २कथ + ख$$

$$स_{३} = अथ^{३} + ३कथ^{२} + ३खथ + ग$$

$$\therefore अ^{२}स_{३} = अ^{२}थ^{३} + ३कअ^{२}थ^{२} + ३खअ^{२}थ + अ^{२}ग$$

$$= अ^{३}थ^{३} + ३कअ^{२}थ^{२} + ३क^{२}अथ + क^{३} — ३क^{२}अथ — क^{३} + ३खअ^{२}थ + अ^{२}ग$$

$$= (अथ + क)^{३} — ३क^{२}अथ — ३क^{३} + ३खअ^{२}थ + ३खअक + अ^{२}ग + २क^{३} — ३खअक$$

$$= स_{१}^{३} — ३क^{२}(अथ + क) + ३खअ(अथ + क) + २क^{३} + अ^{२}ग — ३खअक$$

$$= स_{१}^{३} + ३स_{१}(अख — क^{२}) + २क^{३} + अ^{२}ग — ३खअक$$

$$= सा_{१}^{३} + ३चा स_{१} + जा \text{ (१२२वां प्र० देखो)} \cdots\cdots (२)$$

इसी प्रकार

$$स_{४} = अथ^{४} + ४कथ^{३} + ६खथ^{२} + ४गथ + घ$$

$$\therefore अ^{३}स_{४} = अ^{४}थ^{४} + ४कअ^{३}थ^{३} + ६खअ^{३}थ^{२} + ४गअ^{३}थ + अ^{३}घ$$

$$= \text{अ}^4\text{थ}^4 + ४\text{कअ}^3\text{थ}^3 + ६\text{क}^2\text{अ}^2\text{थ}^2 + ४\text{क}^3\text{अथ} + \text{क}^4$$
$$- ६\text{क}^2\text{अ}^2\text{थ}^2 - ४\text{क}^3\text{अथ} - \text{क}^4 + ६\text{खअ}^2\text{थ}^2$$
$$+ ४\text{गअ}^2\text{थ} + \text{अ}^2\text{घ}$$

$$= (\text{अथ} + \text{क})^4 - ६\text{क}^2\text{अ}^2\text{थ}^2 - १२\text{क}^3\text{अथ} - ६\text{क}^4$$
$$+ ८\text{क}^3\text{अथ} + ५\text{क}^4 + ६\text{खअ}^2\text{थ}^2 + ४\text{गअ}^2\text{थ} + \text{अ}^2\text{घ}$$

$$= \text{स}_1^4 - ६\text{क}^2 (\text{अ}^2\text{थ}^2 + २\text{अकथ} + \text{क}^2) + ८\text{क}^3\text{अथ}$$
$$+ ८\text{क}^4 - ३\text{क}^4 + ६\text{खअ}^2\text{थ}^2 + ४\text{गअ}^2\text{थ} + \text{अ}^2\text{घ}$$

$$= \text{स}_1^4 - ६\text{क}^2\text{स}_1^2 + ६\text{अख}(\text{अ}^2\text{थ}^2 + २\text{अकथ} + \text{क}^2)$$
$$- १२\text{अ}^2\text{कखथ} - ६\text{अक}^2\text{ख} + ८\text{क}^3\text{अथ} + ८\text{क}^4$$
$$+ ४\text{गअ}^2\text{थ} + \text{अ}^2\text{घ}$$

$$= \text{स}_1^4 + ६\text{चास}_1^2 + ८\text{क}^3(\text{अथ} + \text{क}) + ४\text{अ}^2\text{ग}(\text{अथ} + \text{क})$$
$$- ४\text{अ}^2\text{कग} - १२(\text{अथ} + \text{क})\text{अकख} + ६\text{अक}^2\text{ख}$$
$$- ३\text{क}^4 + \text{अ}^2\text{घ}$$

$$= \text{स}_1^4 + ६\text{चास}_1^2 + ४(\text{अथ} + \text{क})(२\text{क}^3 + \text{अ}^2\text{ग}$$
$$- ३\text{अकख}) + \text{अ}^2\text{घ} + ६\text{अक}^2\text{ख} - ४\text{अ}^2\text{कग} - ३\text{क}^4$$

$$= \text{स}_1^4 + ६\text{चास}_1^2 + ४\text{जास}_1 + \text{अ}^2(\text{अघ} - ४\text{कग} + ३\text{ख}^2)$$
$$- ३\text{अ}^2\text{ख}^2 + ६\text{अक}^2\text{ख} - ३\text{क}^4$$

$$= \text{स}_1^4 + ६\text{चास}_1^2 + ४\text{जास}_1 + \text{अ}^2\text{झा}$$
$$- ३(\text{अ}^2\text{ख}^2 - २\text{अखक}^2 + \text{क}^4)$$

$$= \text{स}_1^4 + ६\text{चास}_1^2 + ४\text{जास}_1 + \text{अ}^2\text{झा} - ३(\text{अख} - \text{क}^2)^2$$

$$= \text{स}_1^4 + ६\text{चास}_1^2 + ४\text{जास}_1 + \text{अ}^2\text{झा} - ३\text{च}^2 \quad \cdots\cdots (३)$$

(२) का वर्ग कर $अ^२$ का भाग देने से $अस_३^२$ का मान आवेगा उसमें (३) को $स_१^२$ से गुण कर $अ^३$ का भाग देकर घटा देने से (१) उत्पन्न हो जायगा।

(१) में यदि $स_१ = अथ + क = \frac{\frac{१}{२}जा}{अ^२ष - चा}$ इसका उत्थापन दो तो

$$४अ^३ष^३ - झाअष + छा = ०$$

यह वही अपवर्त्तित घनसमीकरण उत्पन्न होता है जो कि १२२वें प्रक्रम का (२) समीकरण है।

इस प्रकार हरात्मक समीकरण पर से चतुर्घात समीकरण में अव्यक्त के मान जानने के लिये मि. एस्. एस्. ग्रीथीड (Mr S. S. Greatheed) ने कल्पना की है (see Cambridge Math. Journal, vol. I)।

यदि चतुर्घात समीकरण में अव्यक्त के मान क्रम से $अ_१$, $अ_२$, $अ_३$, $अ_४$ ये हों तो इनके रूप में ज और थ के मान इस प्रकार जान सकते हैं।

$य = जर + थ$। इसलिये यदि र के दो मान $र_१$, $र_२$ हों तो और र के मान $\frac{१}{र_१}$, $\frac{१}{र_२}$ ये होंगे। इनका उत्थापन य के मान में देने से

$$अ_१ = जर_१ + थ$$

$$अ_२ = जर_२ + थ$$

$$अ_३ = ज\frac{१}{र_२} + थ$$

$$अ_४ = ज\frac{१}{र_१} + थ$$

इसलिये

$$(\text{अ}_1 - \text{थ})(\text{अ}_4 - \text{थ}) = (\text{अ}_2 - \text{थ})(\text{अ}_3 - \text{थ}) = \text{ज}^2$$

जिससे

$$\text{थ} = \frac{\text{अ}_2\text{अ}_3 - \text{अ}_1\text{अ}_4}{\text{अ}_2 + \text{अ}_3 - \text{अ}_1 - \text{अ}_4}$$

और

$$-\text{ज}^2 = \frac{(\text{अ}_3 - \text{अ}_1)(\text{अ}_2 - \text{अ}_4)(\text{अ}_1 - \text{अ}_2)(\text{अ}_3 - \text{अ}_4)}{(\text{अ}_2 + \text{अ}_3 - \text{अ}_1 - \text{अ}_4)^2}$$

इस प्रकार चतुर्घात समीकरण में अव्यक्त के मान जानने के लिये अनेक कल्पनायें उत्पन्न होती हैं।

१२८—इस प्रक्रम में चतुर्घात समीकरण के क्रिया समेत कुछ उदाहरण दिखलाते हैं।

(१) $\text{य}^4 + ८\text{य}^3 - ६६\text{य}^2 - ८८\text{य} + ८० = ०$ इसमें अव्यक्त के मान निकालो।

१२३वें प्रक्रम के (१) प्रकार से

$$\text{अ} = १,\ \text{क} = २,\ \text{ख} = -११,\ \text{ग} = -२२,\ \text{घ} = ८०$$

इनका उत्थापन घनसमीकरण में देने से

$$४\text{अ}^3 = ४।$$

$$\text{अघ} = ७०,\ ४\text{कग} = -१७६,\ ३\text{ख}^2 = ३६३$$

$$\therefore \text{अघ} - ४\text{कग} + ३\text{ख}^2 = ८० + १७६ + ३६३ = ४४३ + १७६ = ६१९$$

$$\text{अखघ} = -८८०,\ २\text{कखग} = ९६८,\ \text{अग}^2 = ४८४,\ \text{घक}^2 = ३२०,$$
$$\text{ख}^3 = -१३३१$$

$\therefore$ अखघ $+$ २कखग $-$ अग^२ $-$ घक^२ $-$ ख^३ $=$ $-$८८० $+$ ६६८
$-$ ४८४ $-$ ३२० $+$ १३३१ $=$ ६१५

$\therefore$ ४ष^३ $-$ ६१६ष $+$ ६१५ $=$ ०

यहां ष $=$ १ यह निकलता है, इसलिये इसका उत्थापन मा^{२} और ना^{२} में देने से

मा^{२} $=$ क^२ $-$ अख $+$ अ^{२}ष $=$ ४ $+$ ११ $+$ १ $=$ १६

ना^{२} $=$ (ख $+$ २अष)^२ $-$ अघ $=$ ($-$ ११ $+$ २)^२ $-$ ८० $=$ १

यहां

मा·ना $=$ कख $-$ अग $+$ २अकष $=$ $-$ २२ $+$ २२ $+$ ४ $=$ ४

यह धन आता है, इसलिये मा $=$ $+$ ४, ना $=$ $+$ १ वा मा $=$ $-$ ४, ना $=$ $-$ १

इनका उत्थापन वर्गसमीकरण रूप खण्डों में देने से

य^४ $+$ ८य^३ $-$ ६६य^२ $-$ ८८य $+$ ८०

$=$ { अय^२ $+$ २(क $-$ मा)य $+$ ख $+$ २अष $-$ ना }
{ अय^२ $+$ २(क $+$ मा)य $+$ ख $+$ २अष $+$ ना }

$=$ { य^२ $+$ २(२ $-$ ४)य $-$ ११ $+$ २ $-$ १ }
{ य^२ $+$ २(२ $+$ ४)य $-$ ११ $+$ २ $+$ १ }

$=$ (य^२ $-$ ४य $-$ १०) (य^२ $+$ १२य $-$ ८) $=$ ०

इन पर से य^२ $-$ ४य $-$ १० $=$ ० और य^२ $+$ १२य $-$ ८ $=$ ०

तब य $=$ २ $\pm$ $\sqrt{१४}$, और य $=$ ६ $\pm$ $\sqrt{४४}$ ।

(२) य^४ $-$ १०य^२ $-$ २०य $-$ १६ $=$ ० इसमें अव्यक्त के मान बताओ ।

१२४वें प्रक्रम की युक्ति से

$अ = १, क = ०, ख = -\frac{१०}{६} = -\frac{५}{३}, ग = -५, घ = -१६$

$चा = अख - क^२ = -\frac{५}{३}, झा = अघ - ४कग + ३ख^२ = -\frac{२३}{३}$

$जा = अ^२ग - ३अकख + २क^३ = -५,$

$अ^२छा = अ^२झाचा - जा^२ - ४चा^३ = \frac{११५}{९} - २५ + \frac{५००}{२७} = \frac{१७०}{२७}$

इनका उत्थापन फि के घनसमीकरण में देने से

$$४अ^२फि^३ - अझाफि + छा = ४फि^३ + \frac{२३}{३}फि + \frac{१७०}{२७} = ०$$

इसमें यदि ३फि = व तो समीकरण का रूपान्तर

$$\frac{४व^३}{२७} + \frac{२३}{९}व + \frac{१७०}{२७} = \frac{४व^३ + ६९व + १७०}{२७} = ०$$

$\therefore\ ४व^३ + ६९व + १७० = ०$

यहां परिच्छिन्न मूल की युक्ति से व का एक मान - २ आता है।

इस पर से $फि = \frac{व}{३} = -\frac{२}{३}$। और $अ^२फि = प^२ + चा$

अर्थात् $-\frac{२}{३} = प^२ - \frac{५}{३} \therefore प^२ = १ \therefore प = १$ और $त = २, त' = -८$

इनका उत्थापन वर्गसमीकरण रूप खण्डों में देने से

$$य^४ - १०य^२ - २०य - १६$$

$$= (य^२ + २य + २)(य^२ - २य - ८) = ०$$

इन पर से य के $४, -२, -१ + \sqrt{-१}, -१ - \sqrt{-१}$ ये चार मान आते हैं।

(३) $य^४ + प_१य^३ + प_२य^२ + प_३य + प_४ = ०$ इसमें जानते हैं कि

$प_1^3 - ४प_1 प_2 + ८प_3 = ०$ तो य के मान बताओ ।

ऊपर के चतुर्घात समीकरण का रूपान्तर

$$\left\{ य\left(य + \frac{प_1}{२}\right) \right\}^२ + \left(प_2 - \frac{प_1^२}{४}\right) \left\{ य\left(य + \frac{प_3}{प_2 - \frac{प_1^२}{४}}\right) \right\} + प_४ = ०$$ यह हुआ।

परन्तु $प_1^3 - ४प_1 प_2 + ८प_3 = ०$

$$\therefore प_3 = \frac{प_1 प_2}{२} - \frac{प_1^3}{८} = \frac{प_1}{२}\left(प_2 - \frac{प_1^२}{४}\right)$$

इसका उत्थापन चतुर्घात समीकरण के रूपान्तर में देने से

$$\left\{ य\left(य + \frac{प_1}{२}\right) \right\}^२ + \left(प_2 - \frac{प_1^२}{४}\right) \left\{ य\left(य + \frac{प_1}{२}\right) \right\} + प_४ = ०$$

इसमें यदि $य\left(य + \frac{प_1}{२}\right) = व$ तो इसके उत्थापन से व का एक वर्ग समीकरण बन जाता है जिस पर से य के मान व्यक्त हो जायँगे ।

(४) $य^४ + ४य^३ + ३य^२ - २य - ५ = ०$ इसमें य के मान निकालो ।

इसमें $४^३ - ४ \times ४ \times ३ + ८ \times (-२) = ६४ - ४८ - १६ = ०$ इसलिये

$$य^४ + ४य^३ + ३य^२ - २य - ५ = \{य(य+२)\}^२ - \{य(य+२)\} - ५ = ०$$

अब इसमें यदि य(य + २) = व तो

$$व^{२} - व - ५ = ० \therefore व = \frac{१ \pm \sqrt{२१}}{२}$$

और $य^{२} + २य = व$

$\therefore य = -१ \pm \sqrt{व + १}$ ।

(५) $य^{४} - पय^{२} + गय + ग\sqrt{प} = ०$ इसमें य के मान बताओ।

यहां समीकरण का रूपान्तर

$य^{२}(य^{२} - प) + ग(य + \sqrt{प})$

$= य^{२}(य + \sqrt{प})(य - \sqrt{प}) + ग(य + \sqrt{प})$

$= (य + \sqrt{प})\{य^{२}(य - \sqrt{प}) + ग\} = ०$ ऐसा हो जाता है।

इस पर से य का एक मान $-\sqrt{प}$ और और मान घन समीकरण रूप दूसरे खण्ड से आ जायँगे।

अभ्यास के लिये प्रश्न

१। $य^{४} - ६य^{३} + ३य^{२} + २२य - ६ = ०$ इसमें य के मान बताओ।

यहाँ फि = $-\frac{३}{२}$ और समीकरण का रूपान्तर

$(य^{२} - ४य + १)(य^{२} - २य - ६) = ०$ (१२३वें प्र० का (२) प्रकार देखो)।

२। फ (य) = $य^{४} - ८य^{३} - १२य^{२} + ६०य + ६३ = ०$ इसमें य के मान निकालो।

(१२३वें प्रक्रम के (२) प्रकार से) यहां

$४फि^{३} - १६५फि - ४७५ = ०$ इस पर से फि का एक मान = -५

और तब फ $(य) = (य^२ - २य - ३)\ (य^२ - ६य - २१)$

३। फ $(य) = य^४ - १७य^२ - २०य - ६ = ०$ इसमें य के मान बताओ।

(१२३वें प्र० के (२) प्रकार से)

$४फि^३ - \frac{२१७}{१२} फि + \frac{३१८५}{२१६} = ०$ इसमें यदि ६ट = फि तो

$४ट^३ - ६५१ट + ३१८५ = ०$ इसमें ट का एक मान = ७

इसलिये फि = $\frac{७}{६}$ और तब

$$फ\ (य) = (य^२ + ४य + २)\ (य^२ - ४य - ३)$$

४। फ $(य) = य^४ - ६य^३ - ९य^२ + ६६य - २२ = ०$ इसमें य के मान बताओ।

अपवर्त्तित घनसमीकरण

$$४फि^३ - \frac{३३५}{४} फि - \frac{८९७}{८} = ०$$ ऐसा होता है

इस पर से फि = $-\frac{३}{२}$ तब

$$फ\ (य) = (य^२ - ११)\ (य^२ - ६य + २)$$

५। फ $(य) = य^४ - ८य^३ + २१य^२ - २६य + १४ = ०$ इसके मूल निकालो।

यहां फ $(य) = (य^२ - २य + २)\ (य^२ - ६य + ७)$

६। $य^४ + १२य + ३ =$ फ $(य) = ०$ इसमें य के मान बताओ।

यहां फ $(य) = (य^२ - य\sqrt{६} + ३ + \sqrt{६})\ (य^२ + य\sqrt{६} + ३ - \sqrt{६})$

७। फ $(य) = य^४ - ८य^३ - १२य^२ + ८४य - ६३ = ०$ इसके मूल निकालो।

यहां **फ** $(य) = \{य^{२} - २य(२ + \sqrt{७}) + ३\sqrt{७}\}$
$\{य^{२} - २य(२ - \sqrt{७}) - ३\sqrt{७}\}$

८ । $य^{४} + ४य^{३} + ३य^{२} - ४४य - ८४ = ०$ इसमें य के मान बताओ ।

९ । $य^{४} - ६य^{२} - ८य - ३ = ०$ इसमें य के मान बताओ ।

१० । नीचे लिखे हुए समीकरणों के मूल बताओः—

(क) $य^{४} - १२य^{३} + ४९य^{२} - ७८य + ४० = ०$

(ख) $य^{४} - २अय^{३} + (अ^{२} - २क^{२})य^{२} \times २अक^{२}य$
$- अ^{२}क^{२} = ०$ (१२८वें प्र० का (३) उदाहरण देखो)

११ । $य^{४} + त_{१}य^{३} + त_{२}य^{२} + त_{३}य + त_{४} = ०$ इसमें यदि $त_{३}^{२} - त_{१}^{२}त_{४} = ०$ तो सिद्ध करो कि दिए हुए चतुर्घात समीकरण के गुण्य गुणक रूप दो वर्गसमीकरण के खण्ड होंगे ।

चतुर्घात समीकरण में दो राशिओं के वर्गान्तर में

$$\left(य^{२} + \frac{प_{१}}{२}य + \sqrt{त_{४}}\right)^{२}$$

$$- \left\{ य\left(\frac{प_{१}^{२}}{४} + २\sqrt{त_{४}} - प_{२}\right) \right\}^{२}$$ ऐसा होगा ।

१२ । $य^{४} + त_{२}य^{२} + त_{३}य + त_{४} = ०$ इसमें यदि अव्यक्त के दो मान $अ \pm क\sqrt{-१}$ ये हों तो सिद्ध करो कि

$$६४अ^{६} + ३२त_{२}अ^{४} + (४त_{२}^{२} - १६त_{४})अ^{२} - त_{३}^{२} = ०$$

और $क^{२} = अ^{२} + \frac{त_{२}}{२} + \frac{त_{३}}{४अ}$

१२—समीकरण के मूलों का पृथक्करण।

१२९—पिछले अध्यायों में समीकरण के मूलों के विषय में और घन और चतुर्घात समीकरण के मूल जानने के विषय में अनेक सिद्धान्त लिख आये हैं; अब आगे समीकरणों में स्वल्पान्तर से अव्यक्त के आसन्न मान जानने के लिये अनेक युक्तियां लिखी जायँगी। उनके लिये पहले यह विचार करते हैं कि दो निर्दिष्ट संख्याओं के भीतर किसी दिए हुए समीकरण में अव्यक्त के कितने संभाव्य मान पड़े हैं।

१३०—फ (य) इसमें यदि य = ग ऐसा मानने से फ (ग) = ० हो तो १८वें प्रक्रम से फ (य) = ० इस समीकरण में अव्यक्त का एक मान ग होगा। अब यदि च एक ऐसी छोटी धन संभाव्य संख्या मानी जाय कि ग − च और ग + च इन दो संख्याओं के भीतर ग को छोड़ अव्यक्त का कोई और दूसरा मान न पड़ा हो तो १९वें प्रक्रम से फ (ग − च) और फ (ग + च) ये दोनों विरुद्ध चिन्ह के होंगे और इनके बीच अव्यक्त का एक ही मान ग होगा। परन्तु ११वें प्रक्रम से

$$\text{फ}(\text{ग}-\text{च})$$

$$=\text{फ}(\text{ग})-\text{फ}'(\text{ग})\,\text{च}+\text{फ}''(\text{ग})\,\frac{\text{च}^{२}}{१\cdot२}-\text{फ}'''(\text{ग})\,\frac{\text{च}^{३}}{३\,!}+\cdots\cdots$$

$$=-\text{फ}'(\text{ग})\,\text{च}+\text{फ}''(\text{ग})\,\frac{\text{च}^{२}}{१\cdot२}-\text{फ}'''(\text{ग})\,\frac{\text{च}^{३}}{३\,!}+\cdots\cdots$$

और $\text{फ}(\text{ग}+\text{च})$

$$=\text{फ}(\text{ग})+\text{फ}'(\text{ग})\,\text{च}+\text{फ}''(\text{ग})\,\frac{\text{च}^{२}}{१\cdot२}+\text{फ}'''(\text{ग})\,\frac{\text{च}^{३}}{३\,!}+\cdots\cdots$$

$$= फ'(ग) च + फ''(ग) \frac{च^२}{१\cdot२} + फ'''(ग) \frac{च^३}{३!} + \cdots\cdots$$

अब १३वें प्रक्रम से च का ऐसा छोटा मान मान सकते हैं जिसके वश फ'(ग) च यह और पदों के योग से चाहे जितना बड़ा हो, इसलिये फ(ग − च) यह − फ'(ग) च इस चिन्ह का, और फ(ग + च) यह फ'(ग)च इस चिन्ह का होगा। परन्तु दोनों में च एक ही है इसलिये ग के जिस मान में फ(य) यह शून्य के तुल्य होगा उससे अव्यवहित पूर्व य के मान में फ(य) और फ'(य) ये विरुद्ध चिन्ह के होंगे और उससे अव्यवहितोत्तर य के मान में फ(य) और फ'(य) एक चिन्ह के होंगे।

१३१—कल्पना करो कि न घात का एक फल फ(य) है और इसका प्रथमोत्पन्न, द्वितीयोत्पन्न, तृतीयोत्पन्न इत्यादि फल क्रम से $फ_१(य)$, $फ_२(य)$, $फ_३(य)$ इत्यादि हैं (१०वां प्रक्रम देखो) इनमें य के स्थान में अ को रख देने से जो

$$फ(अ),\ फ_१(अ), फ_२(अ), फ_३(अ), \cdots\cdots फ_न(अ)$$

श्रेढी होती है। इसमें जितनी व्यत्यास संख्या होती है उसमें य के स्थान में क को रख देने से

$$फ(क),\ फ_१(क), फ_२(क), फ_३(क), \cdots\cdots$$

इस श्रेढी की व्यत्यास संख्या घटा देने से जो शेष बचे उससे अधिक फ(य) = ० इसमें अ और क के बीच में अव्यक्त के मान नहीं हो सकते, उसके तुल्य वा उसमें कोई कम संख्या घटा देने से जो शेष बचे उसके तुल्य अव्यक्त के मान होंगे।

$$फ(य),\ फ_१(य), \cdots\cdots फ_न(य)$$

इस श्रेढी में य के स्थान में भिन्न भिन्न संख्याओं का उत्थापन देने से किसी पद का चिन्ह नहीं बदल सकता जब तक कि य का एक मान उस पद को शून्य करने से उत्पन्न हुए समीकरण में अव्यक्त के एक मान के तुल्य होकर आगे न बढ़ेगा। (१९वां प्रक्रम देखो)

फ (य), फ$_१$ (य), फ$_२$ (य),.........फ$_न$ (य) इस श्रेढी में चार स्थिति होगी।

१—कल्पना करो कि जब य = ग तो फ (य) = ० और फ$_१$ (य) यह शून्य के तुल्य नहीं होता। तब १३०वें प्रक्रम से ग के अव्यवहित पूर्व फ (य) और फ$_१$ (य) विरुद्ध चिन्ह के और ग के अव्यवहितोत्तर फ (य) और फ$_१$ (य) एक चिन्ह के होंगे। इसलिये य बढ़ते बढ़ते जब ग से [जो फ (य) = ० इसमें बार बार न आने वाला अव्यक्त का एक मान है] पार पहुँचेगा तब श्रेढी में एक व्यत्यास की संख्या कम हो जायगी।

२—कल्पना करो कि ग यह फ (य) = ० इसमें वह अव्यक्त मान है जो त बार आता है तब ५५वें प्रक्रम की युक्ति से य के स्थान में ग का उत्थापन देने से

फ (य), फ$_१$ (य), फ$_२$ (य).........फ$_{त-१}$ (य) ये सब शून्य के तुल्य होंगे, इसलिये ग से अव्यवहित पूर्व य के मान में फ(य), फ$_१$(य),......फ$_{त-१}$(य), फ$_त$(य) ये पास पास के दो दो विरुद्ध चिन्ह के होंगे (देखो १३०वां प्रक्रम)। इसलिये इस स्थिति में त व्यत्यास होंगे और ग से अव्यवहितोत्तर य के मान में फ(य), फ$_१$(य),......फ$_{त-१}$(य), फ$_त$(य) ये सब एक चिन्ह के होंगे। इसलिये पहली व्यत्यास संख्या से दूसरी व्यत्यास संख्या त तुल्य कम होगी।

३—कल्पना करो कि य = ग तो एक कोई उत्पन्न फल $फ_त$(य) यह शून्य के तुल्य होता है और $फ_{त-१}$(य) और $फ_{त+१}$(य) ये शून्य के तुल्य नहीं होते। तब यदि $फ_{त-१}$(ग) और $फ_{त+१}$(ग) ये एक ही चिन्ह के हों तो १३०वें प्रक्रम से ग से अव्यवहित पूर्व य के मान में $फ_त$(य) यह $फ_{त-१}$(य) इससे अथवा $फ_{त+१}$(य) इससे विरुद्ध चिन्ह का होने से $फ_{त-१}$(य), $फ_त$(य), $फ_{त+१}$(य) इसमें दो व्यत्यास और ग से अव्यवहितोत्तर य के मान में $फ_{त-१}$(य) इससे अथवा $फ_{त+१}$(य) इससे $फ_त$(य) यह विरुद्ध चिन्ह का न होने से $फ_{त-१}$(य), $फ_त$(य), $फ_{त+१}$(य) इसमें एक भी व्यत्यास न होगा, इसलिये पहले की अपेक्षा इसमें दो व्यत्यासों की कमी हुई और यदि $फ_{त-१}$(य) और $फ_{त+१}$(य) ये विरुद्ध चिन्ह के होंगे तो ग से अव्यवहित पूर्व य के मान में $फ_{त-१}$(य), $फ_त$(य), $फ_{त+१}$(य) इसमें एक व्यत्यास और ग से अव्यवहितोत्तर य के मान में भी $फ_{त-१}$(य), $फ_त$(य), $फ_{त+१}$(य) इसमें एक ही व्यत्यास के होने से इसमें कोई व्यत्यास की हानि न हुई।

४—कल्पना करो कि य = ग तब म उत्पन्न फल

$फ_त$(य), $फ_{त+१}$(य), $फ_{त+२}$(य),.....$फ_{त+म-१}$(य), $फ_{त+म}$(य) इनमें

पहिले—यदि म सम संख्या और $फ_{त-१}$(य) और $फ_{त+म}$(य) ये एक ही चिन्ह के हों तो ग के अव्यवहित पूर्व य के मान में ऊपर के पदों में म व्यत्यास और ग से अव्यवहितोत्तर य के मान में एक भी व्यत्यास न होगा और यदि $फ_{त-१}$(य) और $फ_{त+म}$(य) ये विरुद्ध चिन्ह के होंगे तो ऊपर के पदों में ग से अव्यवहित पूर्व य के मान में म + १ व्यत्यास

होंगे और ग के अव्यवहितोत्तर य के मान में १ व्यत्यास होगा इसलिये दोनों स्थितिओं में ग से अव्यवहितोत्तर य के मान में उन पदों में पहिले की अपेक्षा म व्यत्यासों की हानि हुई।

दूसरे—यदि म विषम संख्या और $फ_{त-१}(य)$ और $फ_{त+म}(य)$ ये एक ही चिन्ह के हों तो ग से अव्यवहित पूर्व य के मान में म + १ व्यत्यास होंगे और ग के अव्यवहितोत्तर य के मान में एक भी व्यत्यास न होगा और यदि $फ_{त-१}(य)$ और $फ_{त+म}(य)$ ये विरुद्ध चिन्ह के होंगे तो ग से अव्यवहित पूर्व य के मान में म व्यत्यास और ग से अव्यवहितोत्तर य के मान में १ व्यत्यास होगा, इसलिये दोनों स्थितिओं में ग से अव्यवहितोत्तर य के मान में क्रम से म + १ और म − १ व्यत्यासों की हानि हुई। अर्थात् सम संख्या तुल्य व्यत्यासों की हानि हुई।

इसलिये $फ(य)$, $फ_१(य)$, $फ_२(य)$ .... $फ_न(य)$ इस श्रेढी में य के स्थान में अ के रखने से जितने व्यत्यास होंगे उनमें अ के आगे अव्यक्त के प्रति मान के पार जब य चलेगा तब एक एक व्यत्यास की हानि होती जायगी अथवा अ से आगे अव्यक्त के प्रति मान के पार सम संख्या + १ इतने व्यत्यासों की हानि होगी। इस प्रकार से ऊपर कहा हुआ सिद्धान्त उत्पन्न होता है। अङ्गरेज विद्वानों के मत से इस सिद्धान्त का प्रकाशक फोरिअर (Fourier) और फरासीस के विद्वानों के मत से इसका प्रकाशक बुडन (Budan) है।

बुडन ने इस सिद्धान्त को इस तरह से लिखा है:-

कल्पना करो कि $फ(य) = ०$ इस समीकरण पर से एक नया समीकरण ऐसा बनाया जिसमें अव्यक्त मान $फ(य) = ०$

इसमें के अव्यक्त मान से अ तुल्य न्यून हों और दूसरा ऐसा समीकरण बनाया जिसमें अव्यक्त मान फ(य) = ० इसमें के अव्यक्त मान से क तुल्य न्यून हों (३७वां प्र० देखो) तो पहिले नये समीकरण में जितने व्यत्यास होंगे उसमें दूसरे नये समीकरण के व्यत्यासों को घटा देने से जो शेष बचेगा उससे अधिक अ और क के बीच फ(ग) = ० इसके अव्यक्त मान न होंगे। जहां अ से क को बड़ा माना गया है।

३७वें प्रक्रम से दोनों नये समीकरण क्रम से

$$फ(अ) + फ_१(अ)र + फ_२(अ)\frac{र^२}{१\cdot२} + \cdots\cdots + फ_न(अ)\frac{र^न}{न!} = ०$$

$$फ(क) + फ_१(क)र + फ_२(क)\frac{र^२}{१\cdot२} + \cdots\cdots + फ_न(क)\frac{र^न}{न!} = ०$$

ऐसे होंगे और जिनमें वे ही व्यत्यास होंगे जो कि

$$फ(अ),\ फ_१(अ),\ फ_२(अ), \cdots\cdots\cdots फ_न(अ)$$
$$फ(क),\ फ_१(क),\ फ_२(क), \cdots\cdots\cdots फ_न(क)$$

इनमें हैं। इसलिये बुडन के सिद्धान्त और फोरिअर के सिद्धान्त में कुछ भी भेद नहीं केवल वाक्यों में भेद है।

इस सिद्धान्त की व्याप्ति के लिये कुछ उदाहरण दिखलाते हैं:—

(१) नीचे के समीकरण में अव्यक्त के मानों की स्थिति जानना चाहिए:—

$$फ(य) = य^५ - ३य^४ - २४य^३ + ९५य^२ - ४६य - १०१ = ०$$

इसमें $फ_१(य) = ५य^४ - १२य^२ - ७२य^२ + १९०य - ४६$

$$फ_{२}(य) = २०य^{३} - ३६य^{२} - १४४य + १६०$$
$$फ_{३}(य) = ६०य^{२} - ७२य - १४४$$
$$फ_{४}(य) = १२०य - ७२$$
$$फ_{५}(य) = १२०$$

इनमें य के स्थान में −१०, −१, ०, १, १० के उत्थापन से और नीचे के क्रम से केवल $फ$, $फ_{१}$, $फ_{२}$ इत्यादि लिखने से

	$फ_{५}$	$फ_{४}$	$फ_{३}$	$फ_{२}$	$फ_{१}$	$फ$
(−१०)	+	−	+	−	+	−
(−१)	+	−	−	+	−	+
(०)	+	−	−	+	−	− (जैसा समीकरण है)
(१)	+	+	−	+	+	−
(१०)	+	+	+	+	+	+

इनसे ये बातें पाई जाती हैं:—

−१० और −१ के भीतर एक संभाव्य मान है क्योंकि दोनों के व्यत्यासों का अन्तर एक है;

−१ और ० के भीतर भी एक संभाव्य मान है क्योंकि एक व्यत्यास की हानि है; ० और १ के बीच कोई संभाव्य मान नहीं है क्योंकि एक भी व्यत्यास की हानि नहीं है। १ और १० के बीच कम से कम एक संभाव्य मान है क्योंकि तीन व्यत्यासों की हानि है। यहां फोरिअर और बुडन दोनों के सिद्धान्त से यह पता नहीं लगता कि १ और १० के भीतर जो और दो मान हैं वे संभाव्य वा असंभाव्य हैं। इसलिये १ और १० के भीतर और और संख्याओं को य के स्थान में रख कर फिर एक व्यत्यास की हानि पर से संभाव्य मानों का पता

लगाना चाहिए। परन्तु इस क्रम में बड़ा प्रयास करना पड़ेगा और जहां वे दोनों मान बहुत पास पास होंगे तहां तो य के छोटे छोटे अनेक मान मानने से बहुत ही बड़ा प्रयास करना पड़ेगा।

यदि किसी युक्ति से यह पता लगा जाय कि य के दो निर्दिष्ट मानों के भीतर अव्यक्त का कोई संभाव्य मान नहीं है तो व्यत्यासों की दो दो हानि से असंभाव्य मान का पता लग सकता है। जैसे

(२) $\text{फ}(\text{य}) = \text{य}^{४} - ४\text{य}^{३} - [illegible]\text{य} + २३ = ०$

इसमें य के स्थान में ०, १, १० का उत्थापन देने से

	$\text{फ}_{४}$	$\text{फ}_{३}$	$\text{फ}_{२}$	$\text{फ}_{१}$	फ
(०)	+	−	०	−	+
(१)	+	०	−	−	+
(१०)	+	+	+	+	+

यहां पहले यह पता लगाना चाहिए कि य = ० में $\text{फ}_{२} = ०$ और य = १ में $\text{फ}_{३} = ०$ इन दोनों शून्यों में कौन चिन्ह समझना चाहिए। इसके लिये ० और १ के पूर्व और अनन्तर य के स्थान में बहुत ही छोटी संख्या च का उत्थापन देने से

		$\text{फ}_{४}$	$\text{फ}_{३}$	$\text{फ}_{२}$	$\text{फ}_{१}$	फ
(०)	−च	+	−	+	−	+
	+च	+	−	−	−	+
(१)	१ − च	+	−	−	−	+
	१ + च	+	+	−	−	+
(१०)		+	+	+	+	+

इस उपाय से पता लग जाता है कि जब य = ० होने से $फ_२$ = ० होता है तो य के −च मान में $फ_३$ से विरुद्ध चिन्ह का $फ_२$ होगा और जब य = +च तो $फ_३$ और $फ_२$ दोनों एक ही चिन्ह के होंगे। इसी प्रकार य के १ − च और १ + च मान में भी $फ_३$ का पता लगा सकते हो।

य के स्थान में −च और +च के रखने से दो व्यत्यासों की हानि हुई और च को ऐसा छोटा माना है कि इसके भीतर य का कोई संभाव्य मान नहीं है तो कहेंगे कि अव्यक्त का एक जोड़ा असंभव मान होगा।

१ + च और १० के भीतर अव्यक्त के दो संभाव्य मान हैं वा एक जोड़ा असंभव मान है। यहाँ पर फिर भी संशय ही रहा कि वास्तव में मान संभाव्य वा असंभाव्य है।

(३) यदि अनेक पदों के गुणक समीकरण में शून्य हों तो नीचे लिखी हुई युक्ति से असंभव मानों का पता लग सकता है। जैसे

$$य^६ − १ = ०$$

इसमें जानना है कि य के कितने असंभव मान हैं तो

$$फ(य) = य^६ − १$$

$$फ_१(य) = ६य^५$$

$$फ_२(य) = ३०य^४$$

$$फ_३(य) = १२०य^३$$

$$फ_४(य) = ३६०य^२$$

$$फ_५(य) = ७२०य$$

$$फ_६(य) = ७२०$$

य के स्थान में $-$च और $+$च का उत्थापन देने से और च को बहुत ही छोटा मानने से

	$फ_६$	$फ_५$	$फ_४$	$फ_३$	$फ_२$	$फ_१$	फ
($-$च)	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$
($+$च)	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$

यहां चार व्यत्यासों की हानि है और जानते हैं कि च ऐसा छोटा है कि $-$च और $+$च के बीच में कोई संभाव्य मान नहीं है इसलिये चार व्यत्यास के होने से इसमें चार असंभाव्य मान हुए और २२वें प्रक्रम से दो संभाव्य मान होंगे।

इस प्रकार से किसी द्वियुक्पद समीकरण में असंभाव्य और संभाव्य मानों की संख्या जान सकते हैं।

(४) $फ(य) = य^{८} + १०य^{३} + य - ४ = ०$ इसके संभाव्य और असंभाव्य मूलों की संख्या जाननी है।

यहाँ $$फ(य) = य^{८} + १०य^{३} + य - ४ = ०$$

$$फ_{१}(य) = ८य^{७} + ३०य^{२} + १$$

$$फ_{२}(य) = ५६य^{६} + ६०य$$

$$फ_{३}(य) = ३३६य^{५} + ६०$$

$$फ_{४}(य) = १६८०य^{४}$$

$$फ_{५}(य) = ६७२०य^{३}$$

$$फ_{६}(य) = २०१६०य^{२}$$

$$फ_{७}(य) = ४०३२०य$$

$$फ_{८}(य) = ४०३२०$$

यहां य के स्थान में $-$च, ०, $+$च के उत्थापन से

	$फ_8$	$फ_7$	$फ_6$	$फ_5$	$फ_4$	$फ_3$	$फ_2$	$फ_1$	फ
($-$च)	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$
(०)	$+$	०	०	०	०	$+$	०	$+$	$-$
($+$च)	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$

यहां $-$च और $+$च के बीच में ६ व्यत्यासों की हानि हुई और च को बहुत छोटा मानने से $-$च और $+$च इनके बीच में कोई संभाव्य मूल नहीं है इसलिये यहां ६ असंभव मूल होंगे और २२वें प्रक्रम से दो संभव मूल होंगे जिनमें एक धन और दूसरा ऋण होगा।

(५) $य^6 - 3य^2 - य + 1 = 0$ इसके मूलों का पूरा पूरा पता लगाना है।

यहां $फ(य) = य^6 - 3य^2 - य + 1$

$फ_1(य) = 6य^5 - 6य - 1$

$फ_2(य) = 30य^4 - 6$

$फ_3(य) = 120य^3$

$फ_4(य) = 360य^2$

$फ_5(य) = 720य$

$फ_6(य) = 720$

य के स्थान में $-1, 0, 1, 2$ का उत्थापन देने से

	$फ_{६}$	$फ_{५}$	$फ_{४}$	$फ_{३}$	$फ_{२}$	$फ_{१}$	फ	
(−१)	+	−	+	−	+	०	०	[(−१) य का एक मान हुआ]
(०)	+	०	०	०	−	−	+	
(१)	+	+	+	+	+	−	−	
(२)	+	+	+	+	+	+	+	
(०) { −च	+	−	+	−	−	−	+	
(०) { +च	+	+	+	+	−	−	+	
(−१) { −१−च	+	−	+	−	+	−	+	
(−१) { −१+च	+	−	+	−	+	−	−	

−१ इसके उत्थापन से फ (य) = ० इसलिये −१ यह य का एक मान हुआ। च के अत्यन्त छोटे होने से शून्य के आगे पीछे −च और +च इनके बीच संभाव्य मान नहीं है परन्तु दो व्यत्यासों की हानि है इसलिये य के दो असंभाव्य मान हैं।

+च और १ के बीच एक व्यत्यास की हानि है इसलिये +च वा शून्य और १ के बीच य का एक संभाव्य मान और है।

−१+च और −च के बीच एक व्यत्यास की हानि है इसलिये −१+च और −च के बीच में वा −१ और शून्य के बीच में य का एक संभाव्य ऋण मान और है।

१ और २ के बीच में भी एक व्यत्यास की हानि है इसलिये १ और दो के बीच में य का एक धन संभाव्य मान हुआ।

इस प्रकार से चार संभाव्य और दो असंभाव्य मूल फ (य) = ० इसके आए। इस प्रकार प्रति समीकरणों में य के स्थान में ऐसी दो संख्याओं का उत्थापन देना चाहिए जिसमें

एक ही व्यत्यास की हानि हो तब निःसंशय उन दोनों संख्याओं के बीच य का एक मान रहेगा। यदि एक से अधिक व्यत्यासों की हानि होगी तो निःसंशय यह नहीं कह सकते कि उन दोनों संख्याओं के बीच अव्यक्त का एक ही अथवा अधिक मान हैं। इसी प्रकार जिन दो संख्याओं के बीच जानते हैं कि अव्यक्त का कोई संभाव्य मान नहीं है उनमें व्यत्यासों की हानि से असंभाव्य मानों का भी पता लगा सकते हो।

१३२—फ (य), $फ_{१}$(य), $फ_{२}$(य),.........$फ_{न}$(य) इस श्रेढी में यदि य के स्थान में शून्य का उत्थापन दो तो स्पष्ट है कि $प_{१}$, $प_{२}$, $प_{३}$,......$प_{न}$ ये ही जो फ (य) में क्रम से द्वितीय, तृतीय इत्यादि पदों के गुणक हैं होंगे जहां फ (य) में य के सब से बड़े घात का गुणक धन रूप तुल्य है और उसी श्रेढी में यदि य के स्थान में $+\infty$ का उत्थापन दो तो १३वें प्रक्रम से सब पद धन होंगे। इसलिये $प_{१}$, $प_{२}$, $प_{३}$,........$प_{न}$ इसमें जितने व्यत्यास होंगे उतने ही व्यत्यासों की हानि होगी इसलिये फोरिअर के सिद्धान्त से फ (य) = ० इसमें उन व्यत्यासों की संख्या से अधिक ० और $+\infty$ के बीच अव्यक्त के धन संभाव्य मान नहीं हो सकते। यही बात डिकार्टिस की चिन्ह रीति से भी सिद्ध होती है (४४वां प्र० देखो)। इसलिये कह सकते हो कि फोरिअर और बुडन के सिद्धान्त के अन्तर्गत ही डिकार्टिस की चिन्ह रीति है।

१३३—फोरिअर और बुडन के सिद्धान्त से सहज में सर्वत्र पूरा पूरा समीकरण के संभाव्य मूलों का पता नहीं लगता जैसा कि १३१वें प्रक्रम के उदाहरणों से स्पष्ट है इसलिये अब

स्टर्म (Sturm) साहब का एक सिद्धान्त दिखलाते हैं जिसके बल से निःसंशय संभाव्य मूल इत्यादि का पता लग जाता है।

१३४—फ (य) का प्रथमोत्पन्न फल फ,(य) मान लो और कल्पना करो कि फ (य) = ० इसमें अव्यक्त का कोई समान मान नहीं है। इसलिये ५३वें प्रक्रम से फ (य) और फ,(य) का महत्तमापवर्त्तन अव्यक्तात्मक कोई न होगा। इसलिये बीजगणित की युक्ति से यदि फ (य) और फ,(य) का महत्तमापवर्त्तन निकाला जाय तो क्रिया करने से अन्त में व्यक्ताङ्क शेष बचेगा।

फ (य) और फ,(य) में अव्यक्त के एकापचित घात क्रम से पदों को रख लो। जो पद न हों उनमें शून्य गुणक लगा कर ३ प्रक्रम की युक्ति से पूरा करलो।

फ (य) में जो सब से बड़ा य का न घात है उससे एक कम अर्थात् न — १ यह य का सब से बड़ा घात फ,(य) में होगा।

फ (य) को भाज्य, फ,(य) को हर मान कर महत्तमापवर्त्तन निकालने की युक्ति से लब्धि और शेष को निकालो। शेष के धन, ऋण चिन्ह का व्यत्यय कर फिर इसे हार और पहिले हार को भाज्य मान कर भाग देकर दूसरा शेष निकालो फिर धन ऋण चिन्ह का व्यत्यय कर इस शेष को हार मानो और पहिले हार को भाज्य, यों धन ऋण का व्यत्यय कर प्रति शेष को हार मान और उसके पहिले हार को भाज्य मान कर क्रिया करते जाओ जब अन्त में व्यक्ताङ्क शेष हो तब छोड़ दो। इस अन्तिम व्यक्ताङ्क शेष के भी चिन्ह का व्यत्यय कर अन्तिम शेष समझो।

कल्पना करो कि चिन्ह व्यत्यय किए हुए शेषों के मान क्रम से

$$फ_{२}(य),\ फ_{३}(य),\ फ_{४}(य), \cdots\cdots\ फ_{न}(य)\ ये\ हैं ।$$

महत्तमापवर्त्तन की युक्ति से इनसे नीचे लिखे हुए समीकरण बनते हैं:—

$$\left.\begin{array}{l} गु\cdot फ(य) = ल_{१} फ_{१}(य) - म_{२} फ_{२}(य) \\ गु_{१} फ_{१}(य) = ल_{२} फ_{२}(य) - म_{३} फ_{३}(य) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ गु_{त-१} फ_{त-१}(य) = ल_{त} फ_{त}(य) - म_{त+१} फ_{त+१}(य) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ गु_{न-१} फ_{न-२}(य) = ल_{न-१} फ_{न-१}(य) - म_{न} फ_{न}(य) \end{array}\right\} \cdots\cdots (१)$$

जहां $गु, गु_{१}, गु_{२} \cdots\cdots गु_{न-२}$, $म_{२}, म_{३}, \cdots\cdots म_{त+१}$ ये धनात्मक व्यक्त संख्या हैं और $ल_{१}, ल_{२}, ल_{३} \cdots\cdots ल_{न-१}$ ये य के एक घात के खण्ड आ·य + का इस रूप के हैं।

(१) समीकरण से स्पष्ट है कि य के स्थान में चाहे जिस संभाव्य संख्या का उत्थापन दो परन्तु य के पास पास के दो फल एक ही काल में शून्य के तुल्य नहीं हो सकते क्योंकि ऐसा मानने से आगे सब शून्य होते होते $फ_{न}(य)$ जो व्यक्ताङ्क और य से स्वतन्त्र है शून्य के समान होगा जो कि असंभव है।

य के स्थान में किसी ग संख्या के उत्थापन से यदि $फ_{त}(य) = ०$ तो $फ_{त-१}(य)$ और $फ_{त+१}(य)$ ये विरुद्ध चिन्ह के होंगे। इसलिये य के स्थान में ग − च और ग + व के उत्थापन से (जहां च ऐसा छोटा है कि ग − च और ग + च के बीच बीच $फ_{त-१}(य) = ०$ और $फ_{त+१}(य) = ०$ इसके कोई मूल नहीं है) $फ_{त+१}(य)$ और $फ_{त-१}(य)$ अपने अपने चिन्ह को नहीं बदल सकते। इसलिये $फ_{त-१}(य)$ और $फ_{त+१}(य)$ यदि ग से अव्यव-

हित पूर्व और उत्तर य के मान में + और − चिन्ह के होंगे तो फ$_{त}$(य) यह चाहे पूर्व में + और उत्तर में − वा पूर्व में −, उत्तर में + हो, फ$_{त-१}$(य), फ$_{त}$(य), फ$_{त+१}$(य) इन तीनों पदों के आगे पीछे व्यत्यास की संख्या न घटेगी, न बढ़ेगी, ज्यों कि त्यों रहेगी।

यदि य = ग और फ(य) = ० तो ग से अव्यवहित पूर्व और उत्तर य के मान में फ(य) और फ$_{१}$(य) क्रम से भिन्न चिन्ह और एक चिन्ह के होंगे। (१३० वां प्र०) इसलिये य के स्थान में अधिक अधिक संख्या का उत्थापन देने से जब य के एक मान से आगे संख्या चलेगी तब

$$फ(य),\ फ_{१}(य),\ फ_{२}(य), \cdots \cdots फ_{न}(य)$$

इस श्रेढी में एक व्यत्यास की हानि होगी। इस प्रकार य के प्रति एक एक मान में एक एक व्यत्यास की हानि होती चली जायगी। इसलिये य के स्थान में अ का उत्थापन देने से जो

$$फ(अ),\ फ_{१}(अ),\ फ_{२}(अ) \cdots \cdots फ_{न}(अ)$$

इस श्रेढी में व्यत्यास संख्या होगी और य के स्थान में अ से अधिक क का उत्थापन देने से जो

$$फ(क),\ फ_{१}(क),\ फ_{२}(क) \cdots \cdots फ_{न}(क)$$

इस श्रेढी में व्यत्यास संख्या होगी वह पहिली व्यत्यास संख्या से जितनी न्यून होगी अर्थात् इस पिछली श्रेढी में जितनी व्यत्यास हानि होगी उतने ही अ और क के बीच फ(य) = ० इसके संभाव्य मूल होंगे।

१३५—व्यत्यास की संख्या के गणना करने में य के स्थान में किसी संख्या का उत्थापन देने से यदि $फ_१(य)$, $फ_२(य)$,………इत्यादि में कोई शून्य हो जाय तो उसके पूर्व धन वा ऋण चिन्ह लगा देने से कोई भेद न पड़ेगा क्योंकि जो फल शून्य होगा उसके पूर्व और आगे के फल विरुद्ध चिन्ह के होंगे। इसलिये शून्य के साथ चाहे धन वा ऋण चिन्ह हो व्यत्यास की संख्या में भेद नहीं पड़ेगा।

१३६—ऊपर सिद्ध हो चुका है कि य के स्थान में चाहे जिस संभाव्य संख्या का उत्थापन दो परन्तु पास के दो फल एक ही काल में शून्य नहीं हो सकते। इसलिये य के स्थान में किसी संख्या का उत्थापन देने से यदि पास के दो छोड़ अन्य फल शून्य के तुल्य हों तो उनमें यदि फ (य) = ० तो स्पष्ट ही है कि वह संख्या फ(य) = ० इसका एक मूल ही है। इसलिये इसके आगे फ(य), $फ_१(य)$,……$फ_न(य)$ इस श्रेढी में एक व्यत्यास की हानि होगी। और यदि फ(य) को छोड़ और फल शून्य होंगे तो ऊपर की युक्ति से उनके आगे और पीछे के फलों में विरुद्ध चिन्ह होने से व्यत्यास की संख्या में कुछ भेद ही न पड़ेगा।

१३७—यदि फ (य), $फ_१(य)$, $फ_२(य)$,………$फ_न(य)$ **इनमें प्रथम पद के गुणक सब धन वा सब ऋण हों तो फ (य) = ० इसमें अव्यक्त के सब मान संभाव्य होंगे।**

१३४वें प्रक्रम से स्पष्ट है कि फ (य) = ० यह यदि न घात का समीकरण होगा तो स्टर्म के फल भी $फ_१(य)$, $फ_२(य)$……

ये न होंगे। फ(य) = ० इसमें सर्वदा समझो कि य के सब से बड़े घात का गुणक धन संख्या है।

यदि फ(य) = ० इसमें अव्यक्त के समग्र संभाव्य मान कितने हैं यह जानना हो तो स्पष्ट है कि य के स्थान में पहले $-\infty$ इसका उत्थापन देने से स्टर्म की रीति से श्रेणी में जो व्यत्यास होंगे और $+\infty$ इसका उत्थापन देने से श्रेणी में जो व्यत्यास होंगे उनके अन्तर तुल्य अर्थात् य के स्थान में $+\infty$ इसका उत्थापन देने से जितने व्यत्यास की हानि होगी उतने ही फ(य) = ० इसमें अव्यक्त के संभाव्य मान होंगे। इसलिये यदि स्टर्म के सब फलों के आदि पद के गुणक धन वा सब ऋण आवें तो $-\infty$ इसके उत्थापन से श्रेणी में एक धन एक ऋण वा एक ऋण एक धन इस क्रम से पदों के होने से न व्यत्यास होंगे और $+\infty$ इसके उत्थापन से एक भी व्यत्यास न होने से न व्यत्यासों की हानि होगी। इसलिये फ(य) = ० इस न घात समीकरण में अव्यक्त के न संभाव्य मान अर्थात् सब मान संभाव्य होंगे।

१३८—यदि फ(य), फ$_1$(य), फ$_2$(य),.........फ$_न$(य) **इस श्रेढी में प्रत्येक फल के प्रथम पद के गुणक सब धन न हों तो उनको धन ऋण के क्रम से लिखने से जितने व्यत्यास होंगे उतने जोड़े फ(य) = ० इसके मूल असंभाव्य होंगे।**

कल्पना करो कि फ(य), फ$_1$(य), फ$_2$(य).........फ$_न$(य) इनके आदि पद को लेने से म व्यत्यास हुए तो स्पष्ट है कि उनकी संख्या न + १ होने से न − म इतने सर होंगे। इसलिये

य के स्थान में + इसके उत्थापन से म व्यत्यास और न — म सर होंगे (४३वां प्र० देखो)। इसलिये $+\infty$ इसके उत्थापन में व्यत्यासों की हानि न — म — म = न — २म इतनी होने से अव्यक्त के संभाव्य मान न — २म और असंभव मान न — (न — २म) = २ म होंगे, इसलिये फ(य) = ० इसके म जोड़े असंभव मूल हुए।

१३९—यदि स्टर्म के सिद्धान्त में $फ_त$(य) यह एक फल ऐसा आवे कि य के स्थान में किसी संभाव्य संख्या का उत्थापन देने से अपने चिन्ह को न बदले तो स्टर्म के सिद्धान्त में $फ_{त+१}$(य), $फ_{त+२}$(य),·········$फ_न$(य) इन पदों को छोड़ कर लाघव से फ(य), $फ_१$(य), $फ_२$(य),·········$फ_त$(य) इतने ही पदों को लेकर विचार करो क्योंकि $फ_त$(य) इसमें य के स्थान में किसी संभाव्य संख्या के उत्थापन से एक ही चिन्ह होने से $फ_त$(य), $फ_{त+१}$(य)·········$फ_न$(य) इसमें सर्वत्र एक ही व्यत्यास की संख्या होने से किसी संख्या के उत्थापन से श्रेढी में उतने ही व्यत्यासों की हानि होगी जितने व्यत्यासों की हानि फ(य), $फ_१$(य),······$फ_त$(य) इतने ही पदों के वश से होती है। इसलिये और पदों को व्यर्थ रख परिश्रम बढ़ाना उचित नहीं।

१४०—यदि फा (य) यह ऐसा फल हो कि फ (य) = ० इसमें जितने अव्यक्त के संभाव्य मान हों य के स्थान में सभों के उत्थापन से $फ_१$(य) और फा (य) ये दोनों एक ही चिन्ह के हों तो $फ_१$(य) को छोड़ यदि कुछ लाघव जान पड़े तो उसके स्थान में फा (य) को लेकर पूर्व युक्ति से फ(य) और फा (य) को ले स्टर्म के सब फलों को बना सकते हो।

१४१—स्टर्म के सिद्धान्त में अभी तक तो यह माना गया था कि फ(य) = ० इसमें अव्यक्त के समान मान नहीं हैं। अब कल्पना करो कि फ(य) = ० इसमें अव्यक्त का एक मान अ, त वार और दूसरा मान क, थ वार है तो

$$फ(य) = (य - अ)^{त} (य - क)^{थ} (य - ख)(य - ग) \cdots\cdots$$

$$और\ फ_{१}(य) = (य - अ)^{त-१}(य - क)^{थ-१}\{त(य - क)(य - ख)(य - ग) \cdots\cdots + थ(य - अ)(य - ख) + \cdots\cdots\}$$

इसलिये फ(य) और फ$_{१}$(य) का महत्तमापवर्त्तन $(य - अ)^{त-१} (य - क)^{थ-१}$ होगा। स्टर्म की क्रिया में यहां जितने फ(व), फ$_{१}$(य)......... इत्यादि पद होंगे सब को पृथक् पृथक् $(य - अ)^{त-१}(य - क)^{थ-१}$ यह निःशेष करेगा।

अब मान लो कि फि (य) = (य - अ)(य - क)(य - ख)(य - ग)...

$$और\ फा(य) = त(य - क)(य - ख)(य - ग)\cdots\cdots$$
$$+ थ(य - अ)(य - ख)(य - ग)\cdots\cdots$$
$$+ \cdots\cdots\cdots$$

तो यहां स्पष्ट है कि फि (य) का प्रथमोत्पन्न फल फा (य) नहीं है परन्तु यदि त = १ = थ तो फा (य) यह अवश्य फि (य) इसका प्रत्थमोत्पन्न फल होता। यदि य = अ क, ख, ग,......... तो फि (य) के प्रथमोत्पन्न फल का जो चिन्ह होगा वही फा (य) का भी होगा। इसलिये १४०वें प्रक्रम से फि (य) इसमें अव्यक्त के संभाव्य मान जानने के लिये फि (य) के प्रथमोत्पन्न फल के स्थान में फा (य) को रख कर स्टर्म की क्रिया कर सकते हैं।

परन्तु फ (य) और फ$_{१}$(य) से स्टर्म के फलों से जो श्रेणी बनेगी वह वही श्रेणी होगी जो फि (य) और फा (य)

के वश से उत्पन्न स्टर्म के प्रत्येक को फल महत्तमापवर्त्तन $(य-अ)^{त-१}$ $(य-क)^{थ-१}$ इससे गुण देने से होगी। इसलिये फि (य) और फा (य) से जो श्रेणी बनेगी उसमें के प्रत्येक पद के जो चिन्ह होंगे वही वा उनसे उलटे $(य-अ)^{त-१}$ $(य-क)^{थ-१}$ इससे गुण देने से चिन्ह होंगे। इसलिये दोनों श्रेणियों में व्यत्यास की संख्या एक ही आवेगी। इसलिये फ (य) = ० इसके समान मूल हैं वा नहीं इसका बिना विचार किए फ (य) और $फ_{१}$(य) से फि (य) और फा (य) को जान कर स्टर्म की युक्ति से श्रेणी बनाओ और उससे फि (य) = ० इसके जो संभाव्य मूल होंगे वही फ (य) = ० इसके भी होंगे। इस प्रकार बनाई हुई श्रेणी में अन्त का पद शून्य हो तो समझ लेना चाहिए कि फ (य) = ० इसके तुल्य मूल आवेंगे।

इस प्रकार अ और क इन दो संख्याओं के भीतर फ (य) = ० इसमें य के कितने संभाव्य मान पड़े हैं इनका पता स्टर्म के सिद्धान्त से लग जायगा। फिर अ और क के भीतर की अनेक संख्याओं के उत्थापन से यह भी जान सकते हो कि किस संख्या के बहुत ही पास कौन संभाव्य मान है। जैसे

उदाहरण—(१) फ (य) = $य^{३}$ − २य − ५ = ० इसमें अव्यक्त के संभाव्य मानों की संख्या और स्थिति को बताओ।

यहां महत्तमापवर्त्तन और १३४वें प्रक्रम की युक्तियों से

$$फ_{१}(य) = ३य^{२} - २$$
$$फ_{२}(य) = ४य + १५$$
$$फ_{३}(य) = -६४३$$

य के स्थान में $-\infty$, ०, $+\infty$ इनका उत्थापन देने से

	फ	$फ_1$	$फ_2$	$फ_3$
$(-\infty)$	−	+	−	−
(०)	−	−	+	−
$(+\infty)$	+	+	+	−

$-\infty$ इसकी अपेक्षा $+\infty$ इसमें एक व्यत्यास की हानि हुई और ० की अपेक्षा भी $+\infty$ इसमें एक ही व्यत्यास की हानि है इसलिये अव्यक्त का एक ही धन संभाव्य मान होगा।

फिर य के स्थान में क्रम से १,२,३ का उत्थापन देने से

	फ	$फ_1$	$फ_2$	$फ_3$
(१)	−	+	+	−
(२)	−	+	+	−
(३)	+	+	+	−

इसलिये अव्यक्त का धन संभाव्य मान २ और ३ के बीच में है।

(२) $य^३ - ७य + ७ = ०$ इसके संभाव्य मूलों की संख्या और स्थिति को बताओ।

यहां $फ (य) = य^३ - ७य + ७$

$फ_1 (य) = ३य^२ - ७$

$फ_2 (य) = २य - ३$

$फ_3 (य) = १$

यहां प्रत्येक फल के आदि पद के गुणक १, ३, २ और १ धन हैं इसलिए १३७वें प्रक्रम से इसके सब मूल संभाव्य होंगे।

य के स्थान में $-४, -३, -२, -१, १$ और २ के उत्थापन से

	फ	$फ_१$	$फ_२$	$फ_३$
(−४)	−	+	−	+
(−३)	+	+	−	+
(−२)	+	+	−	+
(−१)	+	−	−	+
(१)	+	−	−	+
(२)	+	+	+	+

यहां −४ और −३ के बीच एक ऋण मूल है और १ और २ के बीच दो धन मूल हैं।

इस उदाहरण में यदि फोरिअर के सिद्धान्त को लगाओ तो उसका फ(य), $फ_१$(य) इत्यादि लेने से और य के स्थान में १ और २ का उत्थापन देने से

	फ	$फ_१$	$फ_२$	$फ_३$
(१)	+	−	+	+
(२)	+	+	+	+

यहाँ दो व्यत्यासों की हानि से फोरिअर के सिद्धान्त से यह सिद्ध होता है कि १ और २ के बीच दो से अधिक संभाव्य मूल नहीं हैं परन्तु स्टर्म के सिद्धान्त से निश्चय हो गया कि १ और २ के बीच निःसंशय अव्यक्त के दो ही मान हैं। य के स्थान में १ और २ के बीच के अनेक भिन्नों का उत्थापन देने से स्वल्पान्तर से उन दो मूलों की संख्या भी जान सकते हो।

(३) $फ(य) = य^{४} - २य^{३} - ३य^{२} + १०य - ४ = ०$ इसके संभाव्य मूलों की संख्या और स्थिति को बताओ।

$फ_{१}(य)$ में २ का भाग देने से

$$फ_{१}(य) = २य^{३} - ३य^{२} - ३य + ५$$

$$फ_{२}(य) = ९य^{२} - २७य + ११$$

$$फ_{३}(य) = -८य - ३$$

$$फ_{४}(य) = -१४३३$$

यहां सब फलों के आदि पद के गुणकों के चिन्हों को ले लेने से

$+ + - -$ इसमें एक व्यत्यास है इसलिये १३८ वें प्रक्रम से $फ(य) = ०$ इसका एक जोड़ा असंभाव्य मूल होगा। स्टर्म की युक्ति से य के स्थान में $-\infty, ०, +\infty$ इनका उत्थापन देने से वा २२वें प्रक्रम से यहां य का एक संभाव्य मान धन और एक ऋण होगा। इसलिये यहां केवल $फ(य)$ में धन और ऋण अभिन्न संख्या का उत्थापन देने से पता लगा सकते हो कि ऋण मूल −३ और −२ के भीतर और धन मूल ० और १ के भीतर हैं।

(४) $य^{४} - ५य^{३} + ९य^{२} - ७य + २ = ०$ इसके मूलों की क्या दशा है।

यहाँ $फ_{१}(य) = ४य^{३} - १५य^{२} + १८य - ७$

$$फ_{२}(य) = य^{२} - २य + १$$

$फ_{१}(य)$ में $फ_{२}(य)$ का पूरा पूरा भाग लग जाता है इसलिये अब यहां पर स्टर्म की श्रेढी को रोक दो और $फ_{२}(य)$ से समझ लो कि $फ(य) = ०$ इसके तुल्य मूल हैं।

य के स्थान में $-\infty$ और $+\infty$ इनका उत्थापन देने से

	फ	$फ_1$	$फ_2$
$(-\infty)$	+	−	+
$(+\infty)$	+	+	+

दो व्यात्यासों की हानि से जान पड़ा कि फ(य) = ० इसमें अव्यक्त के अतुल्य दो मान हैं जिनमें से एक तीन बार आया है।

(५) फ(य) = २य^४ − १३य^२ + १०य − १६ = ० इसमें अव्यक्त के मानों की विवेचना करो।

यहाँ $फ_1$(य) = ४य^३ − १३य + ५ (२ के अपवर्त्तन से)

$फ_2$(य) = १३य^२ − १५य + ३८

यहाँ $फ_2$(य) = ० इसके असंभव मूल होने से $फ_2$(य) यह य के किसी संभाव्य मान में सर्वदा धन ही रहेगा। इसलिये आगे स्टर्म की श्रेढी को रोक देने से (१३६वें प्रक्रम से) और य के स्थान में $-\infty$, ० और $+\infty$ इनका उत्थापन देने से

	फ	$फ_1$	$फ_2$
$(-\infty)$	+	−	+
(०)	−	+	+
$(+\infty)$	+	+	+

यहां पर अव्यक्त के दो संभाव्य मान हैं जिनमें एक ऋण और दूसरा धन है।

१४२—किसी धन अभिन्न संख्या से फ(य) को गुण कर यदि $फ_1$(य) का भाग दें तो अव्यक्तात्मक

लब्धि अभिन्न आती है और शेष भी अभिन्न बच जाता है।

कल्पना करो कि $फ(य) = प_0 य^न + प_1 य^{न-1} + \cdots\cdots + प_न$

और इसका प्रथमोत्पन्न फल संभव रहते कोई व्यक्त धन संख्या से पूरा पूरा भाग दे देने पर $फ_1(य) = ब_0 य^{न-1} + ब_1 य^{न-2} + \cdots\cdots\cdots$ ऐसा है। $फ(य)$ और $फ_1(य)$ का महत्तमापवर्त्तन निकालने के लिये कल्पना करो कि एक ऐसी छोटी धन अभिन्न संख्या इ है जिससे $फ(य)$ को गुण कर यदि $फ_1(य)$ का भाग दें तो अव्यक्तात्मक लब्धि और शेष दोनों अभिन्न रहते हैं।

इ $फ(य)$ में $फ_1(य)$ का भाग देने से मान लो कि इ $फ(य)$ के प्रथम पद के गुणक में $फ_1(य)$ के प्रथम पद के गुणक से भाग देने से अभिन्न व्यक्ताङ्क ल आया तो

$इप_0 = ब_0 ल$, $प_0$ और $ब_0$ का महत्तमापवर्त्तन म से भाग देनेसे

$$इप'_0 = ब'_0 ल \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

जहां $मप'_0 = प_0$ और $मब'_0 = ब_0$।

बीजगणित की साधारण रीति से $इ \cdot फ(य)$ में $लम \cdot फ_1(य)$ को घटा देने से शेष में य के बड़े घात का गुणक $इप_1 - लब_1$ यह होगा। इसमें भी $फ_1(य)$ के प्रथम पद के गुणक का पूरा भाग लग जाय तब लब्धि और शेष दोनों अभिन्न होंगे ऐसा कह सकते हैं।

कल्पना करो कि $इप_1 - लब_1$ में $ब_0$ का भाग देने से लब्धि $ल'$ तो

$$इप_1 - लब_1 = ब_0 ल'$$

दोनों पक्षों को $प_०$ इससे गुण देने से

$$इप_० प_१ - लप_० ब_१ = प_० ब_० ल'$$

वा

$$इप'_० प_१ - लप'_० ब_१ = प'_० ब_० ल'$$

वा (१) समीकरण से

$$लब'_० प_१ - लप'_० ब_१ = प'_० ब_० ल'$$

$$\therefore \; ल' = \frac{ल(ब'_० प_१ - प'_० ब_१)}{प'_० ब_०} = \frac{ल भा}{हा}$$

यदि $ब'_० प_१ - प'_० ब_१ = भा$, $प'_० ब_० = हा$ ।

फिर यदि $भा = म_१ भा'$ और $हा = म_१ हा'$ जहां $म_१$ यह भा और हा का महत्तमापवर्त्तन है तब

$$ल' = ल \frac{भा'}{हा'}$$

हर का भाग देने से

$$ल' = ल \left(\frac{प_१}{प_०} - \frac{ब_१}{ब_०} \right) \cdots\cdots\cdots\cdots (२)$$

अब यहां यदि $\frac{प_१}{प_०}, \frac{ब_१}{ब_०}$ भिन्नों के हरों के इ गुणित लघुत्तमापवर्त्य तुल्य ल कल्पना करें तो $ल'$ अभिन्न आता है। इसका उत्थापन (१) में देने से

$$इप'_० = ब'_० ल \quad \therefore \; इ = \frac{ब'_०}{प'_०} ल \cdot इ_१$$

अब इस में $\frac{ब'_० ल}{प'_०}$ जो दृढ़ हर हो उसके तुल्य $इ_१$ को मानने से इ का मान व्यक्त हो जायगा।

इस पर से यह क्रिया उत्पन्न होती है।

फ (य) और फ$_1$(य) के आदि दो पदों को क्रम से हार और अंश कल्पना कर $\frac{प_1}{प_0}$, $\frac{ब_1}{ब_0}$ ऐसे दो भिन्नों को बना कर अपवर्त्तन की युक्ति से उनका लघुतम रूप कर लो तब उनके हारों का जो लघुतमापवर्त्य आवे उससे फ$_1$(य) के प्रथम पद के गुणक को गुण कर अंश और फ (य) के प्रथम पद के गुणक को हर कल्पना कर अपवर्त्तन की युक्ति से इस भिन्न का भी लघुतम रूप कर लो। इसमें जो अंश का मान आवे वही इष्टाङ्क का मान आवेगा जिससे फ (य) को गुण कर यदि फ$_1$(य) का भाग दिया जाय तो अव्यक्तात्मक लब्धि और शेष दोनों अभिन्न होंगे। क्रिया करने में सर्वत्र गुणकों का संख्यात्मक धन मान ग्रहण करना चाहिए।

जैसे यदि फ (र) $=$ र$^3+$ ३चा र$+$जा $=$ ०

तो फ$_1$(र) $=$ र$^2+$चा (३ का भाग दे देने से)

अब फ (र) में फ$_1$(र) का भाग देने से अव्यक्तात्मक लब्धि और शेष अभिन्न होते ही हैं तो भी ऊपर की युक्ति से

$$प_0 = १,\ प_1 = ०,\ ब_0 = १,\ ब_1 = ०$$

$\frac{प_1}{प_0} = \frac{०}{१}$, $\frac{ब_1}{ब_0} = \frac{०}{१}$ इनका लघुतम रूप भी $\frac{०}{१}$, $\frac{०}{१}$ यही हुआ और हरों का लघुतमापवर्त्य भी १ हुआ। इसे $\frac{ब_0}{प_0} = \frac{१}{१}$ इससे गुण कर लघुतम रूप करने से अंश १ हुआ। इसलिये १ से फ (र) को गुणने से लब्धि और शेष दोनों अभिन्न आते हैं।

फिर $फ_१(र)$ से $फ(र)$ में भाग देने से शेष

$$२चा\,र + जा$$

इसलिये स्टर्म का $फ_२(र) = -२चा\,र - जा$ ।

फिर यहां ऊपर की युक्ति से

$फ_१(र) = र^२ + चा$ और $फ_२(र) = -२चा\,र - जा$ में $प_० = १$, $प_१ = ०$ $ब_० = २चा$, $ब_१ = जा$ ।

इसलिये $\frac{प_१}{प_०} = \frac{०}{१}$, $\frac{ब_१}{ब_०} = \frac{जा}{२चा}$, दोनों लघुतम भिन्नों के हारों का लघुतमापवर्त्य $= २चा$ इसे $\frac{ब_०}{प_०} = \frac{२चा}{१}$ इससे गुण कर लघुतम रूप करने से अंश $४चा^२$ यह इष्ट का मान आया ।

इससे $फ_१(र)$ को गुण कर $फ_२(र)$ का भाग देने से, चिन्ह को उलट देने से $फ_३(र) = -(जा^२ + ४चा^३)$ ।

यहां यदि $फ(र) = ०$ इसमें यह विचार करना हो कि य के तीनों मान कब संभाव्य होंगे तो १३७वें प्रक्रम से

$$फ(र) = र^३ + ३चा\,र + जा$$

$$फ_१(र) = र^२ + चा$$

$$फ_२(र) = -२चा\,र - जा$$

$$फ_३(र) = -(जा^२ + ४चा^३)$$

इनमें प्रत्येक आदि पद के गुणकों को धनात्मक होना चाहिए इसलिये यदि चा और $जा^२ + ४चा^३$ ये दोनों ऋण संख्या हों तो $फ(र) = ०$ इसमें अव्यक्त के सब मान संभाव्य

होंगे। यदि चा और जा को ११२वें प्रक्रम के घनसमीकरण के साथ तुलना करो तो यही बात ११३वें प्रक्रम से भी सिद्ध होती है। इसी प्रकार

$$फ(र) = र^{४} + ६चार^{२} + ४जार + अ^{२}झा - ३चा^{२} = ०$$

इसके प्रथमोत्पन्न फल में ४ का भाग दे देने से

$$फ_{१} = र^{२} + ३चार + जा$$

$र^{२} + ३चार + जा$	$र^{४} + ६चार^{२} + ४जार + अ^{२}झा - ३चा^{२}$	$र$
	$-र^{४} \pm ३चार^{२} \pm जार$	
	$३चार^{२} + ३जार + अ^{२}झा - ३चा^{२}$	

चिन्ह बदल देने से

$$फ_{२}(र) = -३चार^{२} - ३जार - (अ^{२}झा - ३चा^{२})$$

१४२वें प्रक्रम की युक्ति से

$फ_{१}(र)$ में $प_{०} = १$, $प_{१} = ०$, $फ_{२}(र)$ में $ब_{०} = ३चा$, $ब_{१} = ३जा$

इसलिये $\frac{प_{१}}{प_{०}} = \frac{०}{१}$, $\frac{ब_{१}}{ब_{०}} = \frac{३जा}{३चा} = \frac{जा}{चा}$। इन भिन्नों के हरों का लघुतमापवर्त्य चा हुआ। इसे $\frac{ब_{०}}{प_{०}} = \frac{३चा}{१}$ इससे गुण देने से $\frac{३चा^{२}}{१}$ यह हुआ। इसका लघुतम रूप भी यही है इसलिये इसका अंश $३चा^{२}$ यह इष्ट का मान हुआ। इससे $फ_{१}(र)$ को गुण कर $फ_{२}(र)$ का भाग देने से

$$\begin{array}{r|l} -३चार^{२}-३जार & ३चा^{२}र^{३}+९चा^{३}र+३चा^{२}जा \;\big(-चार+जा \\ -(अ^{२}झा-३चा^{२}) & ३चा^{२}र^{३}+३चाजार^{२}+र(अ^{२}चाझा-३चा^{३}) \\ \hline & -३चाजार^{२}+(९चा^{३}+३चा^{३}-अ^{२}चाझा)र+३चा^{२}जा \\ & -३चाजार^{२}-३जा^{२}र-अ^{२}जाझा+३चा^{२}जा \\ \hline \end{array}$$

$$शेष = (१२चा^{३}+३जा^{२}-अ^{२}चाझा)र+अ^{२}जाझा$$

$$शे = \{३(४चा^{३}+जा^{२}-अ^{२}चा\,झा)+२अ^{२}चा\,झा\}र+अ^{२}जा\,झा$$

$$=(-३अ^{२}छा+२अ^{२}चा\,झा)र+अ^{२}जा\,झा$$ (१२२वें प्रक्रम से)

इसमें $+अ^{२}$ का भाग देकर चिन्ह उलट देने से

$फ_{३}(र) = -(२चा\,झा-३अछा)र - जा\,झा$ (१४२वें प्रक्रम की युक्ति से) $फ_{२}(र)$ में $प_{०}=३चा$, $प_{१}=३जा$; $फ_{३}(र)$ में $ब_{०}=२चा\,झा-३अछा$, $ब_{१}=जा\,झा$, $\frac{प_{१}}{प_{०}}=\frac{जा}{चा}$, $\frac{ब_{१}}{ब_{०}}=\frac{जा\,झा}{२चा\,झा-३अछा}$ इनके लघुत्तम रूप के हरों का लघुतमापवर्त्य चा(२चा झा —३अछा) इसे $\frac{ब_{०}}{प_{०}}=\frac{२चा\,झा-३अछा}{३चा}$ इससे गुण देने से

भिन्न $\frac{(२चा\,झा-३अछा)^{२}}{३}$ इसका लघुत्तम रूप भी यही हुआ। इसलिये इसका अंश $(२चा\,झा-३अछा)^{२}$ यही इष्ट का मान हुआ।

इससे $फ_{२}(र)$ को गुणा कर $फ_{३}(र)$ का भाग देने से

$$\text{शेष} = ३\text{जा}^२\text{चाझा}^२ + ३\text{जा}^२\text{झा}(२\text{चाझा} - ३\text{अछा})$$
$$- (\text{अ}^२\text{झा} - ३\text{चा}^२)(२\text{चाझा} - ३\text{अछा})(२\text{चाझा} - ३\text{अछा})$$
$$= -३\text{चाजा}^२\text{झा}^२ + (२\text{चाझा} - ३\text{अछा})(३\text{जा}^२\text{झा} - २\text{अ}^२\text{चाझा}^२$$
$$+ ३\text{अ}^२\text{छाझा} + ६\text{चा}^३\text{झा} - ९\text{अचा}^२\text{छा})$$
$$= -३\text{चाजा}^२\text{झा}^२ + (२\text{चाझा} - ३\text{अछा})\{३\text{झा}(\text{जा}^२ + \text{अ}^२\text{छा})$$
$$- २\text{अ}^२\text{चाझा}^२ + ६\text{चा}^३\text{झा} - ९\text{अचा}^२\text{छा}\}$$
$$= -३\text{चाजा}^२\text{झा}^२ + (२\text{चाझा} - ३\text{अछा})\{३\text{झा}(\text{अ}^२\text{चाझा} - ४\text{चा}^३)$$
$$- २\text{अ}^२\text{चाझा}^२ + ६\text{चा}^३\text{झा} - ९\text{अचा}^२\text{छा}\}$$
$$= -३\text{चाजा}^२\text{झा}^२ + (२\text{चाझा} - ३\text{अछा})(३\text{अ}^२\text{चाझा}^२$$
$$- १२\text{चा}^३\text{झा} - २\text{अ}^२\text{चाझा}^२ + ६\text{चा}^३\text{झा} - ९\text{अचा}^२\text{छा})$$
$$= -३\text{चाजा}^२\text{झा}^२ + (२\text{चाझा} - ३\text{अछा})(\text{अ}^२\text{चाझा}^२$$
$$- ६\text{चा}^३\text{झा} - ९\text{अचा}^२\text{छा})$$
$$= -३\text{चाजा}^२\text{झा}^२ + २\text{अ}^२\text{चा}^२\text{झा}^३ - १२\text{चा}^४\text{झा}^२$$
$$- १८\text{अचा}^३\text{छाझा} - ३\text{अ}^३\text{चाछाझा}^२ + १८\text{अचा}^३\text{छाझा}$$
$$+ २७\text{अ}^२\text{चा}^२\text{छा}^२$$
$$= -३\text{चाजा}^२\text{झा}^२ + २\text{अ}^२\text{चा}^२\text{झा}^३ - १२\text{चा}^४\text{झा}^२$$
$$- ३\text{अ}^३\text{चाछाझा}^२ + २७\text{अ}^२\text{चा}^२\text{छा}^२$$
$$= २\text{अ}^२\text{चा}^२\text{झा}^३ - ३\text{चाझा}^२(\text{जा}^२ + ४\text{चा}^३ + \text{अ}^३\text{छा})$$
$$+ २७\text{अ}^२\text{चा}^२\text{छा}^२$$
$$= २\text{अ}^२\text{चा}^२\text{झा}^३ - ३\text{अ}^२\text{चा}^२\text{झा}^३ + २७\text{अ}^२\text{चा}^२\text{छा}^२$$
$$= -\text{अ}^२\text{चा}^२\text{झा}^३ + २७\text{अ}^२\text{चा}^२\text{छा}^२$$

इसमें $\text{अ}^२\text{चा}^२$ का भाग देने से और चिन्ह को बदल देने से

$$\text{फ}_४(\text{र}) = \text{झा}^३ - २७\text{छा}^२$$ (१२२ वां प्र० देखो)

अब यदि चतुर्घातसमीकरण में अव्यक्त के सब मान संभाव्य होंगे तो

$$फ(र) = र^४ + ६चार^२ + ४जार + अ^२झा - ३चा^२ ।$$
$$फ_१(र) = र^३ + ३चार + जा ।$$
$$फ_२(र) = -३चार^२ - ३जार - (अ^२झा - ३चा^२) ।$$
$$फ_३(र) = -(२चाझा - ३अछा)र - जाझा ।$$
$$फ_४(र) = झा^३ - २७छा^२$$

इनमें के आदि पद १३७वें प्रक्रम से धन होंगे। इसलिये यदि चा, २चाझा − ३अछा ऋण और $झा^३ - २७छा^२$ धन हो तो सब मान संभाव्य होंगे।

१४३—फ(य) और इसके प्रथमोत्पन्न फल $फ_१(य)$ से महत्तमापवर्त्तन की युक्ति से स्टर्म साहब के फलों के निकालने में बहुत प्रयास करना पड़ता है, इसलिये लाघव से फलों को निकालने के लिये एक युक्ति दिखलाते हैं:—

कल्पना करो कि $फ(य) = प_०य^न + प_१य^{न-१} + प_२य^{न-२} + \cdots\cdots + प_तय^{न-त} + \cdots\cdots + प_न$ और इसका प्रथमोत्पन्न फल $फ_१(य) = ब_१य^{न-१} + ब_२य^{न-२} + \cdots\cdots + ब_तय^{न-त} + \cdots\cdots + ब_न$

फ(य) को $ब_१^२$ से गुण कर $फ_१(य)$ का भाग देने से

$$शेष = \{ ब_२(-ब_१प_१ + प_०ब_२) + ब_१^२प_२ - ब_१प_०ब_३ \}य^{न-२}$$
$$+ \{ ब_३(-ब_१प_१ + प_०ब_२) + ब_१^२प_३ - ब_१प_०ब_४ \}य^{न-३}$$
$$+ \{ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \} \cdots\cdots\cdots$$
$$+ \{ब_त(-ब_१प_१ + प_०ब_२) + ब_१^२प_त - ब_१प_०ब_{त+१}\}य^{न-त}$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

चिन्ह को बदल देने से स्टर्म का पहला शेष

$$फ_{२}(य)=\{ब_{२}(ब_{१}प_{१}-प_{०}ब_{२})+ब_{१}प_{०}ब_{३}-ब^{२}प_{२}\}य^{न-२}$$
$$+\{ब_{३}(ब_{१}प_{१}-प_{०}ब_{२})+ब_{१}प_{०}ब_{४}-ब^{२}प_{३}\}य^{न-३}$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\{ब_{त}(ब_{१}प_{१}-प_{०}ब_{२})+ब_{१}प_{०}ब_{त+१}-ब^{२}प_{त}\}य^{न-त}$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

इस पर से यह क्रिया उत्पन्न होती है:—

फ(य) और फ₁(य) राशि में य के एकापचित घात क्रम से ३ प्रक्रम की युक्ति से सब पदों को बना लो।

$फ_{१}(य)$ के प्रथम पद के गुणक से फ(य) के द्वितीय पद के गुणक को गुण कर उसमें फ(य) के प्रथम पद के गुणक से गुणित $फ_{१}(य)$ के द्वितीय पद का गुणक घटा कर शेष संख्या को पहली संख्या समझो। फ(य) और $फ_{१}(य)$ के प्रथम पद के गुणकों का घात दूसरी संख्या और $फ_{१}(य)$ के प्रथम पद के गुणक का वर्ग तीसरी संख्या समझो। तीनों संख्याओं में यदि संभव हो तो समान ही घन संख्या का अपवर्त्तन देकर और तीसरे का चिन्ह बदल कर क्रम से पहिला, दूसरा और तीसरा स्थिर गुणक समझो।

$फ_{१}(य)$ के द्वितीय पद के आरंभ से सब पदों के गुणकों को पहिले स्थिर गुणक से गुण कर एक पंक्ति में रक्खो। इसके नीचे एक के नीचे एक इस क्रम से $फ_{१}(य)$ के तृतीय पद के आरंभ से सब पदों के गुणकों को दूसरे स्थिर गुणक से गुण कर रक्खो। इसके नीचे एक के नीचे एक इस क्रम से फ(य)

के तृतीय पद के आरंभ से सब पदों के गुणकों को तीसरे स्थिर गुणक से गुण कर रक्खो। इस प्रकार ऊर्ध्वाधर पंक्ति में जो जो संख्या होंगी उनको जोड़ लेने से और संभव रहते किसी समान धन संख्या का अपवर्त्तन दे देने से ये सब क्रम से $फ_२(य)$ के सब पदों के गुणक आ जायँगे। इनमें $य^{न-२}$, $य^{न-३}$ इत्यादि लगा देने से $फ_२(य)$ का मान निकल आवेगा। $फ(य)$ और $फ_१(य)$ इनके स्थान में $फ_१(य)$ और $फ_२(य)$ को लेने से ऊपर ही की युक्ति से $फ_३(य)$ निकल आवेगा फिर $फ_२(य)$ और $फ_३(य)$ को लेने से $फ_४(य)$ आवेगा। इस प्रकार सब आ जायँगे। जैसे

उदाहरण—(१) $फ(य) = य^६ - ७य^५ + १५य^४ - ४०य^२ + ४८य - १६$

इसमें $फ_१(य) = ६य^५ - ३५य^४ + ६०य^३ - ८०य + ४८$

$फ(य)$ और $फ_१(य)$ को पूरा करने से क्रम से दोनों के गुणक

$+१, -७, +१५, ०, -४०, +४८, -१६$

$+६, -३५ +६०, ०, -८० +४८$

पहिली संख्या $= ६ \times -७ - १ \times -३५ = -७$

दूसरी " $= १ \times ६ \qquad = ६$

तीसरी " $= ६ \times ६ \qquad = ३६$

इन तीनों में किसी धन संख्या का अपवर्त्तन न लगने से प्रथम स्थिर गुणक $= -७$, दूसरा $= ६$, तीसरा $= -३६$।

क्रम से स्थिर गुणकों से गुणित $फ_१(य)$ के द्वितीय पदादि, तथा तृतीय पदादि गुणक और $फ(य)$ के तृतीय पदादि गुणक क्रम से

$-७ \times = +२४५, -४२०, \; ०, \; +५६०, -३३६$

$६ \times = +३६०, \; ०, -४८०, +२८८$

$-३६ \times = -५४०, \; ०, +१४४०, -१७२८, +५७६$

योग $= +६५, -४२०+६६०, -८८०. +२४०$

$१३, -८४, +१९२, +१७६, +४८,$

५ के अपवर्त्तन से

इसलिये $फ_२(य) =$

$$१३य^४ - ८४य^३ + १९२य^२ - १७६य + ४८$$

इसी प्रकार $फ_१(य)$ और $फ_२(य)$ को लेने से

प्रथम संख्या $= १३ \times -३५ - ६ \times -८४ = ४९$

दूसरी " $= १३ \times ६ = ७८$

तीसरी " $= १३ \times १३ = १६९$

अपवर्त्तन न लगने से प्रथम गुणक = ४९, दूसरा = ७८, तीसरा = १६९।

$४९ \times = -४११६, +९४०८, -८६२४, +२३५२$

$७८ \times = +१४९७६, -१३७२८, +३७४४$

$-१६९ \times = -१०१४०, \; ०, +१३५२०, -८११२$

योग $= +७२०, -४३२०, +८६४०, -५७६०$

७२० के अपवर्त्तन से और य के घातों को लगा देने से

$$फ_३(य) = य^३ - ६य^२ + १२य - ८ = (य-२)^३$$

इसी प्रकार आगे भी सब निकाल सकते हो।

(२) $फ(य) = य^४ - ६य^३ + ५य^२ + १४य - ४ = ०$

यहां फ(य) का प्रथमोत्पन्न फल

$$फ_१(य) = ४य^३ - १८य^२ + १०य + १४$$

२ के अपवर्त्तन से

$$फ_१(य) = २य^३ - ९य^२ + ५य + ७$$

प्रथम संख्या $= २ \times -९ - १ \times -९ = -९$ ⎫ प्र. गु $= -९$
दूसरी " $= २ \times १ \qquad = २$ ⎬ द्वि. गु $= २$
तीसरी " $= २ \times २ \qquad = ४$ ⎭ तृ. गु $= -४$

$-९ \times = +२७, -१५, -२१$

$२ \times = +१०, +१४$

$-४ \times = -२०, -५६ + १६$

योग $= +१७, -५७, -५$

किसी घन संख्या का अपवर्त्तन न लगने से और य के घात लगा देने से

$$फ_२(य) = १७य^२ - ५७य - ५$$

फिर $फ_१(य)$ और $फ_२(य)$ को लेने से

प्र. सं. $= १७ \times -९ - २ \times -५७ = -३९$ ⎫ प्र. गु $= -३९$
द्वि. सं. $= २ \times १७ \qquad = ३४$ ⎬ द्वि. गु $= ३४$
तृ. सं. $= १७ \times १७ \qquad = २८९$ ⎭ तृ. गु $= -२८९$

$-३९ \times = +२२२३, १९५$

$३४ \times = -१७०$

$-२८९ \times = -१४४५, -२०२३$

योग $= +६०८, -१८२८$

४ का अपवर्त्तन दे देने से और य का घात लगा देने से

$फ_३(य) = १५२य - ४५७$

फिर $फ_२(य)$ और $फ_३(य)$ को लेने से

$फ_२(य) = १७य^२ - ५७य - ५$

$फ_३(य) = १५२य - ४५७$

$प्र. सं. = १५२ \times -५७ - १७ \times -४५७ = -८६५$

$फ_३(य)$ में तीसरे इत्यादि पदों के न होने से दूसरी संख्या का कुछ प्रयोजन नहीं और

$तीसरी संख्या = १५२ \times १५२$

इसलिये $प्र. गु = -८६५$

$तृ. गु = -१५२ \times १५२$

दोनों गुणक ऋण हुए इसलिये

$$फ_४(य) = -८६५ \times -४५७ + (-१५२ \times १५२ \times -५)$$
$$= ८६५ \times ४५७ + १५२ \times १५२ \times ५$$

अर्थात् $फ_४(य)$ का मान धन हुआ।

ऐसे स्थानों में गुणन करने का परिश्रम बचाने के लिये केवल गुणन के सांकेतिक चिन्ह से इतना समझ लेना चाहिए कि अन्त में जो फल य से स्वतन्त्र आता है अर्थात् व्यक्त संख्यात्मक है वह धन है वा ऋण।

यहां प्रथम संख्या का भी संख्यात्मक मान निकालने का कुछ प्रयोजन नहीं केवल अटकल से मालूम पड़ जाता है कि वह प्रथम संख्या ऋण होगी इसलिये प्रथम गुणक भी ऋण

होगा। इसलिये $फ_४(य)$ का प्रथम खण्ड धन और दूसरा भी धन होने से $फ_४(य)$ का मान धन व्यक्त संख्या होगी। इस प्रकार से स्टर्म के शेषों के निकालने में बहुत ही लाघव है। मेरी समझ में जितने परिश्रम से महत्तमापवर्त्तन की युक्ति से स्टर्म के शेष निकलेंगे उसके आधे परिश्रम में मेरी युक्ति से निकलेंगे और महत्तमापवर्त्तन की युक्ति से क्रिया जितने स्थान को व्याप्त करेगी उससे आधे ही स्थान में मेरी युक्ति से क्रिया पूरी हो जायगी। बुद्धिमानों को चाहिए कि इस पर विशेष ध्यान दें।

अभ्यास के लिये प्रश्न।

१। $य^४ + ३य^३ + ७य^२ + १०य + १ = ०$ स्टर्म की युक्ति से इसके मूलों की विवेचना करो।

यहां दो संभाव्य मूल (−२, −१) और (−१, ०) इनके बीच में हैं और दो असंभाव्य मूल होंगे।

२। $य^४ - ४य^३ - ३य + २३ = ०$ इसके मूलों की विवेचना करो।

यहां दो संभाव्य और दो असंभाव्य मूल होंगे। एक संभाव्य २,३ और दूसरा ३,४ के बीच में होगा।

३। $य^५ + २य^४ + य^३ - ४य^२ - ३य - ५ = ०$ इसमें अव्यक्त के मानों की विवेचना करो।

इसमें अव्यक्त का एक ही संभाव्य मान होगा।

४। $य^४ - २य^३ - ७य^२ + १०य + १० = ०$ इसके मूलों की विवेचना करो।

इसके सब मूल संभाव्य हैं और −३ और ३ के बीच में हैं।

५। $य^५ + ३य^४ + २य^३ - ३य^२ - २य - २ = ०$ इसमें अव्यक्त के मानों की विवेचना करो।

यहां एक ही संभाव्य मान है जो १ और २ के बीच में है।

६। $य^३ + ११य^२ - १०२य + १८१ = ०$ इसके मूलों की विवेचना करो।

यहां तीनों मूल संभाव्य हैं। दो मूल ३·२ और ३·३ के बीच होने से बहुत ही पास पास हैं। इसलिये उनके सीमाओं को अलगाने में बहुत प्रयास करने की आवश्यकता है।

७। $य^५ + य^४ + य^३ - २य^२ + २य - १ = ०$ इसमें अव्यक्त के मानों की विवेचना करो।

यहां एक ही संभाव्य मान ० और १ के बीच में है।

८। $य^४ - ६य^३ + ५य^२ + १४य - ४ = ०$ इसके मूलों की विवेचना करो।

यहां सब मूल संभाव्य हैं। एक −२ और −१ के बीच, एक ० और १ के बीच, दो ३ और ४ के बीच हैं।

९। सिद्ध करो कि न्यूटन की प्रधान धन सीमा जानने की युक्ति फोरिअर के सिद्धान्त के अन्तर्गत ही है (६३वां प्रक्रम देखो)

१०। $य^६ - ६य^५ - ३०य^२ + १२य - ९ = ०$ इसमें अव्यक्त के मानों की विवेचना करो।

यहां केवल दो संभाव्य मान हैं जो क्रम से −२ और −१, और ६ और ७ के बीच में हैं।

११। $२य^६ - १८य^५ + ६०य^४ - १२०य^३ - ३०य^२ + १८य - ५ = ०$ इसमें अव्यक्त के मानों की विवेचना करो।

यहां केवल दो संभाव्य मान हैं जो क्रम से -१ और ०, और ५ और ६ के बीच में हैं।

१२। $२य^३ + १५य^२ - ८४य - १६० = ०$ इसके मूलों की परीक्षा करो।

यहां सब संभाव्य मूल हैं। एक $-\infty$ और -७ के बीच और दो -७ और ६ के बीच हैं।

१३। $३य^४ - ६य^२ - ८य - ३ = ०$ इसमें अव्यक्त के मानों की विवेचना करो।

यहां दो संभाव्य मान हैं जो क्रम से -१ और ०, और १ और २ के बीच में हैं। यहां $फ_२(य) = (य+१)^२$ ऐसा होगा, इसलिये स्टर्म की युक्ति से $फ_२(य)$ ही तक फलों को लेकर मानों की विवेचना करो। (१३६ वां प्र० देखो)।

१४। नीचे लिखे हुए समीकरणों में स्टर्म के सिद्धान्त से दिखलाओ कि अव्यक्त का एक ही संभाव्य मान हैः—

(१) $य^३ + ६य^२ + १०य - १ = ०$

(२) $य^३ - ६य^२ + ८य + ४० = ०$

(३) $य^३ - ४य + ४० = ०$

(४) $य^३ + २य^२ - ३य - १० = ०$

१५। सिद्ध करो कि "को राशिर्द्विशतीक्षुण्णो राशिवर्गयुतो हतः" इत्यादि भास्कराचार्य के चतुर्घात समीकरण में जो

$फ(य) = य^४ - २य^२ - ४००य - ९९९९ = ०$ यह सिद्ध होता है इसमें अव्यक्त के दो ही संभाव्य मान होते हैं जिनके क्रम से मान ११ और -९ है।

१६। $य^४ - ११य^३ + ६६य^२ - ७०य - ४२ = ०$ इसके मूलों को बुडन की रीति से अलगाओ।

उ० मूल, (−१,०), (२,३), (४,५) और (६,१०) इनके बीच में सब संभाव्य हैं।

१७। स्टर्म की रीति से किसी चतुर्घात समीकरण के उत्पन्न सब फलों के आदि पदों के चिन्ह + + − + − ऐसा नहीं हो सकते यह सिद्ध करो।

१८। यदि किसी चतुर्घात समीकरण में चा और भा दोनों धन हों तो सिद्ध करो कि अव्यक्त के सब मान असंभाव्य होंगे (१४२वें प्रक्रम के चतुर्घात समीकरण के उदाहरण से और १२२वें प्रक्रम से चा, जा इत्यादि के मानों से सिद्ध होगा कि स्टर्म के फलों के आदि चिन्ह + + − + + वा + + − − + ऐसे होंगे)।

१३—आसन्नमानानयन

१४४—फ (य) = ० इसमें स्वल्पान्तर से य का जो मान आता है उसे अव्यक्त का आसन्न मान कहते हैं। ये आसन्न मान संभाव्य संख्यात्मक ही जाने जा सकते हैं।

भारतवर्ष के प्राचीन गणितज्ञों ने $य^२ = अ$ इस समीकरण में य का आसन्न मान इस प्रकार से निकाला है:—

कल्पना करो कि अ का मूल मू से बड़ा और मू+१ से छोटा है तो स्पष्ट है कि य का मान मू से बड़ा और मू+१ से छोटा होगा। मान लो कि य = मू+र जहां र रूप से अल्प है तो

$$य^२ = (मू + र)^२ = मू^२ + २मू\cdot र + र^२ = अ$$

$$\therefore \quad २मू\cdot र + र^२ = अ - मू^२ = शे$$

दोनों पक्षों में $र^२$ के जोड़ने से

$$२मूर + २र^२ = शे + र^२$$

$$\therefore \quad र = \frac{शे + र^२}{२मू + २र} = \frac{शे + १ + र^२ - १}{२मू + २ + २र - २} = \frac{शे + १ - (१ - र^२)}{२मू + २ - २(१ - र)}$$

$$= \frac{शे + १}{२मू + २} + \frac{शे + १ - (१ - र^२)}{२मू + २ - २(१ - र)} - \frac{शे + १}{२मू + २}$$

$$= \frac{शे + १}{२मू + २} + \frac{(१ - र)\left\{\frac{शे - मू}{(मू + १)^२} - \frac{र}{मू + १}\right\}}{२\left(\frac{मू + र}{मू + १}\right)}$$

$$= \frac{शे + १}{२(मू + १)} + \frac{(१ - र)\left\{\frac{अ + मू^२ - मू}{(मू + १)^२} - \frac{र}{मू + १}\right\}}{२\left(\frac{मू + र}{मू + १}\right)}$$

$$= \frac{शे + १}{२(मू + १)} + \frac{(१ - र)\left\{\frac{अ}{(मू + १)^२} - \frac{मू + र}{मू + १}\right\}}{२\left(\frac{मू + र}{मू + १}\right)}$$

$$= \frac{शे + १}{२(मू + १)} + \frac{(१ - र)}{२}\left\{\frac{अ}{(मू + १)(मू + र)} - १\right\}$$

दूसरे खण्ड का मान सब से अधिक होगा जब $र = ०$

तब दूसरा खण्ड $= \frac{१}{२}\left(\frac{अ}{मू^{२}+मू} - १\right) = \frac{१}{२}\left(\frac{अ - मू^{२} - मू}{मू^{२}+मू}\right)$

$$= \frac{शे - मू}{२मू(मू+१)}$$

इसमें यदि शेष का महत्तम मान जो कि २मू तुल्य होता है मान लो तो दूसरे खण्ड का महत्तम मान $= \frac{१}{२(मू+१)}$ यह रूपाल्प होता है। इसे प्राचीनों ने छोड़ दिया है। इसलिये स्वल्पान्तर से र का मान $\frac{शे+१}{२(मू+१)}$ यह हुआ और तब $य = \sqrt{अ} = मू + \frac{शे+१}{२मू+२}$। दूसरे खण्ड को नीची जाति बनाने के लिये ६० से गुण देने से $य = मू + \frac{६०(शे+१)}{२मू+२}$।

इस पर प्राचीनों का यह सूत्र है:—

'मूलावशेषकं सैकं षष्टिघ्नं विकलान्वितम्।
द्विगुणेन द्वियुक्तेन मूलेनाप्तं स्फुटं भवेत्॥'

यह सूत्र परम्परा से सब करणग्रन्थों में प्रसिद्ध है।

जिस संख्या का निरवयव मूल नहीं मिलता उसके सूक्ष्म मूलानयन के लिये कमलाकर इत्यादिकों ने पहले उस संख्या को साठ के वर्ग से गुण कर तब ऊपर की युक्ति से मूल लेकर मूल में साठ का भाग दे दिया है। उन लोगों का यह सूत्र है—

'षष्टिवर्गगुणादङ्कान्मूलं ग्राह्यं यादगतम्।
सैकशेषं षष्टिगुणं द्वियुक्-द्विघ्नपदोद्धृतम्॥'

कमलाकर ने अपने स्पष्टाधिकार में ज्या पर से पञ्चमांश ज्या के साधन के लिये यह विधि लिखा है कि समीकरण में अव्यक्त के एक घात को एक तरफ और और अव्यक्त के घात और व्यक्ताङ्क को दूसरी तरफ ले जाकर अव्यक्त के एक घात के गुणक से दूसरे पक्ष में भाग देकर अव्यक्त का अव्यक्तात्मक मान जान लो। अब इस मान में अटकल से जो व्यक्त, अव्यक्त का आसन्न मान आवे उसका उत्थापन देकर दूसरा आसन्न मान निकालो फिर इसके उत्थापन से तीसरा मान निकालो; यों बार बार क्रिया करने से एक ही मान आने लगे तब उसी को अव्यक्त का सूक्ष्म आसन्न मान कहो। जैसे

उदाहरण—(१) $य^३ - २य - ५ = ०$ इसमें अव्यक्त का मान जानना है।

ऊपर की क्रिया से अव्यक्त के एक घात को एक ओर ले जाने से

$$२य = य^३ - ५ \quad \therefore \quad य = \frac{य^३ - ५}{२}$$

इसमें पहले य = २ ऐसा मानने से य का दूसरा आसन्न मान

$य = \frac{य^३ - ५}{२} = \frac{८ - ५}{२} = \frac{३}{२}$। य के स्थान में फिर इसका उत्थापन देने से

$$य = \frac{(\frac{३}{२})^३ - ५}{२} = \frac{२७ - ४०}{८ \times २} = -\frac{१३}{१६}$$

इस प्रकार से आसन्न मान आते जायँगे परन्तु यहां यह कुछ नियम नहीं कि उत्तरोत्तर सूक्ष्म आसन्न मान ही आता जायगा, हां यदि य के वास्तव मान के बहुत ही पास वाली

संख्या का उत्थापन य के स्थान में दिया जाय तो इनके मत से आसन्न मान आ सकता है।

इसी उदाहरण में ऊपर मूलानयन की युक्ति से पहिले यह समझ लिया कि

$$फ(य) = य^३ - २य - ५ = -१ \text{ यदि } य = २, \text{ और } फ(य) = +१६$$

यदि य = ३। इसलिये चिन्ह के व्यत्यास से जान पड़ा कि २ और ३ के भीतर य का एक मान है। कल्पना करो कि य = २ + च तो

$$फ(२+च) = फ(२) + फ'(२)च + फ''(२)\frac{च^२}{१\cdot२} + फ'''(२)\frac{च^३}{३!}$$

परन्तु $फ(य) = य^३ - २य - ५ \quad \therefore फ(२) = -१$

$फ'(य) = ३य^२ - २ \quad \therefore फ'(२) = १०$

$फ''(य) = ६य \quad \therefore फ''(२) = १२$

$फ'''(य) = ६ \quad \therefore फ'''(२) = ६$

इसलिये

$$फ(२+च) = -१ + १०च + \frac{१२च^२}{२} + \frac{६च^३}{६}$$

$$= च^३ + ६च^२ + १०च - १ = ०$$

अब कमलाकर की युक्ति से

$$च = \frac{१ - ६च^२ - च^३}{१०}$$

अब इसमें स्पष्ट है कि च सर्वदा रूपाल्प है; इसलिये पहिले च के स्थान में शून्य का उत्थापन देने से च = $\frac{१}{१०}$। अब च के स्थान में $\frac{१}{१०}$ के उत्थापन से तीसरा च का असन्न मान

$$=\frac{१-\frac{६}{१००}-\frac{१}{१०००}}{१०}=\frac{१०००-६०-१}{१००००}=\frac{९३९}{१००००}$$

फिर इसके उत्थापन से उत्तरोत्तर च के अनेक मान आवेंगे। इनसे य के आसन्न मान $=२+च$

$$२+०,\ २\frac{१}{१०},\ २\frac{९३९}{१००००},\cdots\cdots$$ इत्यादि आवेंगे।

इससे सिद्ध होता है कि जहां अव्यक्त का मान रूपाल्प होगा वहाँ कमलाकर की युक्ति से उत्तरोत्तर आसन्न मान सूक्ष्म होंगे।

ऊपर २ के स्थान में यदि ग रक्खें तो

$$फ(ग+च)=फ(ग)+फ'(ग)च+फ''(ग)\frac{च^२}{१\cdot२}+\cdots\cdots=०$$

इसलिये $$च=\frac{-फ(ग)-फ''(ग)\frac{च^२}{२}-\cdots\cdots}{फ'(ग)}$$

इसमें यदि पहिले च के स्थान में शून्य का उत्थापन दो तो

$$च=-\frac{फ(ग)}{फ'(ग)}\cdots\cdots\cdots\cdots(१)$$

इसलिये $य=ग+च=ग-\frac{फ(ग)}{फ'(ग)}$।

ग के स्थान में $ग-\frac{फ(ग)}{फ'(ग)}=ग_१$ इसके उत्थापन से (१) समीकरण से च का दूसरा मान निकलेगा जिसे

$ग - \frac{फ(ग)}{फ'(ग)} = ग_1$, इसमें जोड़ देने से य का दूसरा आसन्न मान आवेगा। यों बार बार क्रिया करने से (१) से य का बहुत ही सूक्ष्म मान आ जायगा।

(१) समीकरण से जो आसन्नमान ले आने की युक्ति उत्पन्न होती है उसे न्यूटन सहाब ने निकाला है इसलिये इसे आसन्नमान जानने के लिये न्यूटन की रीति कहते हैं।

ऊपर जो $य^3 - २य - ५ = ०$ यह उदाहरण दिखाया है इसी उदाहरण को न्यूटन ने भी ग्रहण कर अपनी रीति को दिखलाया हैं।

यदि ध्यान से देखो तो कमलाकर ही की रीति का विशद रूपान्तर न्यूटन की रीति है।

१४५—न्यूटन की रीति से जो बार बार आसन्नमान आता वह उत्तरोत्तर सूक्ष्म होता है वा नहीं यह उनकी रीति से स्पष्ट नहीं होता। इसके लिये फोरिअर ने यह रीति निकाली है—

कल्पना करो कि $फ(य) = ०$ इस समीकरण में अ और क के बीच एक ही अव्यक्त का मान पड़ा है और $फ'(य) = ०$, $फ''(य) = ०$ इनके अ और क के बीच कोई अव्यक्त मान नहीं है तो न्यूटन की रीति से उत्तरोत्तर सूक्ष्म आसन्नमान आते जायँगे यदि क्रिया का आरम्भ अ और क की भीतर की संख्या से की जायगी जिन दोनों संख्याओं के भीतर य के स्थान में किसी संख्या का उत्थापन देने से $फ(य)$ और $फ''(य)$ दोनों एक चिन्ह के होंगे।

ऊपर की कल्पना से स्पष्ट है कि अ और क के बीच य के मान में फ(य) एक बेर चिन्ह बदलेगा परन्तु फ′(य) और फ″(य) दोनों एक ही चिन्ह के रहेंगे। यहां यह समझ लेना चाहिए कि क − अ यह कोई धन संख्या है।

१४६—ऊपर की युक्ति से सिद्धि के लिये पहिले कल्पना करो कि $फा(य) = फ(य) - फ(अ) - \frac{य - अ}{क - अ}\{फ(क) - फ(अ)\}$

यह एक समीकरण है। इसमें यदि य = अ वा य = क तो स्पष्ट है कि फा(य) = ० होता है इसलिये ६८वें प्रक्रम की युक्ति से फा(य) = ० इसमें एक अव्यक्त मान अ और क के बीच अवश्य होगा। मान लो कि यह मान आ के तुल्य है तो (१०वें प्रक्रम से)

$फा'(य) = फ'(य) - \frac{फ(क) - फ(अ)}{क - अ}$ इसमें य के स्थान में आ के उत्थापन से

$$फ'(आ) - \frac{फ(क) - फ(अ)}{क - अ} = ०$$

$$\therefore फ(क) - फ(अ) \qquad = (क - अ)\, फ'(आ)$$

इस पर से सिद्ध होता है कि अ और क के बीच में एक आ ऐसी संख्या अवश्य होगी जिससे

$फ(क) - फ(अ) = (क - अ)\, फ'(आ)$ ऐसा एक समीकरण बनेगा।

१४७—कल्पना करो कि अ से क बड़ा है तो यदि फ′(आ) यह धन होगा तो फ(क), फ(अ) से बड़ा होगा। और यदि फ′(आ) यह ऋण होगा तो फ(क) से फ(अ) बड़ा होगा। यदि

अ और क के बीच प्रत्येक य के मान में फ′(य) हो तो स्पष्ट है कि फ′(आ) भी धन होगा और अ और क के बीच प्रत्येक य के मान में यदि फ′(य) ऋण हो तो फ′(आ) भी ऋण होगा।

इस पर से यह सिद्ध होता है कि यदि किसी दो संख्याओं के बीच प्रत्येक य के मान में फ′(य) धन हो तो उन दोनों संख्याओं के बीच य के मान में फ(य) बढ़ता जायगा और यदि फ′(य) ऋण हो तो फ(य) घटता जायगा। अर्थात् उन दो संख्याओं के भीतर यदि फ′(य) एक ही चिन्ह का रहेगा और फ(य) और फ′(य) एक ही चिन्ह के होंगे तो उन दोनों संख्याओं के भीतर य जैसा जैसा बढ़ता जायगा तैसा तैसा फ(य) का संख्यात्मक मान बढ़ता जायगा। और यदि फ(य) और फ′(य) विरुद्ध चिन्ह के होंगे तो फ(य) का संख्यात्मक मान घटता जायगा।

१४८—अब फोरियर की रीति की उत्पत्ति ऐसे करो—

पहले—कल्पना करो कि य = अ तो फ(य) और फ″(य) एक ही चिन्ह के हैं। मान लो कि पहिला आसन्न मान अ है तो न्यूटन की रीति से दूसरा आसन्न मान $अ_१ = अ - \frac{फ(अ)}{फ'(अ)}$

कल्पना करो कि य का वास्तव मान = अ + च तो फ(अ + च) = ०

अब १४६वें प्रक्रम से फ(अ + च) − फ(अ) = च फ′(आ)
(जहाँ अ और अ + च के बीच में कोई संख्या आ है।)

इसलिये $च = -\frac{फ(अ)}{फ'(आ)}$ और य का वास्तव मान $अ - \frac{फ(अ)}{फ'(आ)}$ हुआ और न्यूटन की रीति से दूसरा आसन्न मान

$अ - \frac{फ(अ)}{फ'(अ)}$ यह हुआ जिसको सिद्ध करना है कि अ की अपेक्षा वास्तव मान के निकट है। च के धन होनेसे $\frac{फ(अ)}{फ'(आ)}$ इसमें भाज्य और भाजक विरुद्ध चिन्ह के होंगे और कल्पना से फ(अ) और फ''(अ) एक ही चिन्ह के हैं; इसलिये फ'(आ) और फ''(अ) भी विरुद्ध चिन्ह के होंगे। इसलिये य के अ और क के बीच के मानों में फ'(य), जैसा जैसा य बढ़ेगा, तैसा तैसा घटता जायगा (१४७वां प्रक्रम देखो) इसलिये फ'(अ) के संख्यात्मक मान से फ'(आ) का संख्यात्मक मान अल्प होगा; इसलिये $- \frac{फ(अ)}{फ'(अ)}$ यह धनात्मक संख्या $- \frac{फ(अ)}{फ'(आ)}$ इस धनात्मक संख्या से कम होगी; इसलिये न्यूटन का दूसरा आसन्न मान पहिले की अपेक्षा वास्तव मान के पास वास्तव मान से अल्प है। अब दूसरे आसन्न मान को $अ_१$ कहो तो ऊपर ही की युक्ति से सिद्ध हो जायगा कि $अ_१ - \frac{फ(अ_१)}{फ'(अ_१)} = अ_२$ यह तीसरा आसन्न मान दूसरे आसन्न मान की अपेक्षा वास्तव मान से कुछ अल्प वास्तव के पास है। इस तरह से सब आसन्न मान एक से दूसरा सूक्ष्म होता जायगा।

दूसरे—कल्पना करो कि फ(य) और फ''(य) एक ही चिन्ह के हैं। और पहिले य को क के तुल्य मान लिया जो कि अ से और वास्तव य के मान से भी बड़ा है तो न्यूटन का दूसरा आसन्न मान $क - \frac{फ(क)}{फ'(क)}$ यह होगा। मान लो कि

य का वास्तव मान = क + च है जहां च ऋणात्मक संख्या है तो फ (क + च) = ० और १४९वें प्रक्रम से फ (क + च) − फ (क) = चफ′(का) जहां का, क + च और क के बीच में है।

इसलिये $च = -\frac{फ(क)}{फ'(का)}$ यहां च के ऋण होने से फ (क) और फ′(का) एक ही चिन्ह के होंगे और कल्पना से फ (क) और फ″(क) भी एक ही चिन्ह के हैं; इसलिये फ′(का) और फ″(क) एक ही चिन्ह के होंगे; इसलिये अ और क के बीच जैसा जैसा य बढ़ता जायगा तैसा तैसा फ′(य) भी बढ़ता जायगा। (१४७वां प्रक्रम देखो)। इसलिये फ′(क) का संख्यात्मक मान फ′(का) के संख्यात्मक मान से बड़ा होगा; इसलिये $\frac{फ(क)}{फ'(क)}$ यह धनात्मक संख्या $\frac{फ(क)}{फ'(का)}$ इससे छोटी होगी।

इसलिये पहिले आसन्नमान की अपेक्षा न्यूटन का दूसरा आसन्न मान वास्तव मान के पास है। इसी युक्ति से दूसरे की अपेक्षा तीसरा आसन्न मान वास्तव मान के पास होगा। इस तरह से एक की अपेक्षा दूसरा आसन्न मान वास्तव मान के पास पास होता जायगा। इसलिये फोरियर का विशेष इस स्थान में बड़ा ही उपयोगी है। अर्थात् जिन दो संख्याओं के बीच य के बढ़ने वा घटने से जब फ(य) और फ″(य) एक ही चिन्ह के होंगे तब उन दोनों संख्याओं में से चाहे जिसको प्रथम आसन्न मान यदि न्यूटन की क्रिया करोगे तो आसन्न मान उत्तरोत्तर सूक्ष्म आते जायेंगे और यदि यह स्थिति न होगी तो न्यूटन की रीति से निश्चय नहीं कि उत्तरोत्तर आसन्न मान सूक्ष्म होंगे।

१४९—कल्पना करो कि न्यूटन की रीति से किसी बार का आसन्न मान ग है तो ऊपर के प्रक्रम की युक्ति से वास्तव मान $= ग - \frac{फ(ग)}{फ'(गा)}$ यह होगा; इसलिये न्यूटन के आसन्न मान ग और वास्तव मान में अन्तर $\frac{फ(ग)}{फ'(गा)} = त$ यह होगा। और न्यूटन का ग से आगे का आसन्न मान $ग - \frac{फ(ग)}{फ'(ग)}$ यह होगा; इसलिये इसका और वास्तव मान का अन्तर $= \frac{फ(ग)}{फ'(गा)} - \frac{फ(ग)}{फ'(ग)} = त\frac{फ'(ग) - फ'(गा)}{फ'(ग)}$ परन्तु १४६ वें प्रक्रम से

$फ'(ग) - फ'(गा) = (ग - गा)फ''(घा)$ जहां ग और गा के बीच में कोई संख्या घा है। इसलिये इसके उत्थापन से अन्तर $= \frac{त(ग - गा)फ''(घा)}{फ'(ग)}$ परन्तु ग और ग + च = वास्तव मान के बीच में कोई संख्या गा है। इसलिये ग − गा यह त से अल्प होगा; इसलिये यह अन्तर $\frac{त^{२}फ''(घा)}{फ'(ग)}$ इससे अल्प होगा। यदि उन दोनों संख्याओं के बीच य को बढ़ाने वा घटाने से $फ''(य)$ का महत्तम मान $फ'(य)$ के न्यूनतम मान से विभक्त किया जाय और लब्धि को ल कहो तो अन्तर सर्वदा $लत^{२}$ इससे अल्प रहेगा। जैसे १४४वें प्रक्रम के $य^{३} - २य - ५ = ०$ इस उदाहरण में सिद्ध है कि वास्तव मान २ और २·१ के बीच में है तो

$फ(य) = य^{३} - २य - ५$, $फ'(य) = ३य^{२} - २$, $फ''(य) = ६य$, इसमें य के स्थान में २·१ का उत्थापन देने से २ और २·१ के

बीच $फ''(य) = ६य$ का महत्तम मान = १२·६ और $फ'(य) = ३य^२ - २$ का न्यूनतम मान य के स्थान में २ के उत्थापन से १० इसका भाग $फ''(य)$ के महत्तम मान में देने से ल = १·२६ इसमें यदि स्वल्पान्तर से दशमलव को छोड़ दें तो ल = १; इस लिये स्वल्पान्तर से पहिले अन्तर त से दूसरे अन्तर $लत^२ = त^२$ इसमें दूना दशमलव स्थान होगा।

१५०—ल्यागरांज (Lagrange) की रीति—

आसन्न मान जानने के लिये ल्यगरांज ने यह रीति निकाली है। कल्पना करो कि अटकल से यह जान लिया कि $फ(य) = ०$ इसमें य का एक मान अ और अ + १ के बीच में पड़ा है। स्टर्म के सिद्धान्त से यह भी पक्का कर लिया है कि अव्यक्त का एक ही मान अ और अ + १ के बीच में है। मान लो कि $य = अ + \frac{१}{र}$, इसका उत्थापन $फ(य)$ में देने से दिए हुए समीकरण का रूप $फ\left(अ + \frac{१}{र}\right) = ०$ ऐसा होगा, इसमें छेदगम से स्पष्ट है कि $फा(र) = ०$ ऐसा एक समीकरण होगा जिसमें र का धनात्मक मान एक ही होगा क्योंकि दिए हुए समीकरण में य का एक ही मान अ और अ + १ के बीच में है।

इस $फा(र) = ०$ में अब र के स्थान में १, २, ३ ·········के उत्थापन से समझ लो कि कौन दो पास की अभिन्न संख्याओं के बीच में र का मान पड़ा है।

कल्पना करो कि क और क + १ के बीच में जान पड़ा कि र का मान पड़ा है। मान लो कि $र = क + \frac{१}{ल}$, इसका उत्थापन $फा(र)$ में देने से और छेदगम से $फि(ल) = ०$ एक ऐसा समी-

करण होगा जिसमें ऊपर की युक्ति से ल का एक ही धनात्मक मान होगा। फिर इस फि(ल) में ल के स्थान में १, २, ३...... के उत्थापन से जान सकते हो कि किन दो पास की संख्याओं के भीतर ल का मान है।

कल्पना करो कि ग और ग + १ के भीतर ल का मान है। फिर $ल = ग + \frac{१}{व}$ कल्पना कर व इत्यादि के मान जानने से लगातार क्रिया करने से य का मान $= अ + \cfrac{१}{क + \cfrac{१}{ग + \cfrac{१}{\cdots\cdots}}}$ इस वितत भिन्न के रूप में जान सकते हो जिसे य के अनेक आसन्न मान उत्तरोत्तर सूक्ष्म बनेंगे।

उदाहरण—(१) $य^३ - २य - ५ = ०$ इसमें य का आसन्न मान जानना है।

यहां ७३वें प्रक्रम से स्पष्ट है कि संभाव्य मान एक ही है वह भी २१वें प्रक्रम से धन होगा।

परीक्षा से जान पड़ा कि वह धनात्मक मान २ और ३ के बीच में है। मानो $य = २ + \frac{१}{र}$ तो

$$फ(२) = २^३ - २.२ - ५ = -१$$

$$फ'(२) = ३.२^२ - २ = १०$$

$$\frac{१}{२}फ''(२) = ३.२ = ६$$

इसलिये र के रूप में $-र^३ + १०र^२ + ६र + १ = ०$

चिन्हों के बदलने से $र^3 - १०र^2 - ९र - १ = ०$ ऐसा समीकरण हुआ जिसे फा(र) कहो।

यदि र = १० तो फा(र) ऋण और र = ११ तो फा(र) धन होता है; इसलिये १० और ११ के बीच में र हुआ।

मानो कि $र = १० + \frac{१}{ल}$ तो

$$फा(१०) = १०^3 - १०\cdot१०^2 - ९\cdot१० - १ = -९१$$
$$फा'(१०) = ३\cdot१०^2 - २०\cdot१० - ९ = ९१$$
$$\frac{१}{२}फा''(१०) = ३\cdot१० - १० = २०$$

इसलिये ल के रूप में समीकरण $-९१ल^3 + ९४ल^2 + २०ल + १ = ०$, चिन्हों के बदलने से $९१ल^3 - ९४ल^2 - २०ल - १ = ० = फि(ल)$

यहां यदि ल = २ तो फि (ल) धन और ल = १ तो फि (ल) ऋण; इसलिये ल का मान १ और २ के बीच में हुआ।

मानो कि $ल = १ + \frac{१}{व}$ तो

$$फि(१) = ९१\cdot१^3 - ९४\cdot१^2 - २०\cdot१ - १ = -२४$$
$$फि'(१) = १८३\cdot१^2 - १८८\cdot१ - २० = -२५$$
$$\frac{१}{२}फि''(१) = १८३\cdot१ - ९४ = ८९$$

इसलिये व के रूप में समीकरण

$-२४व^3 - २५व^2 + ८९व + ९१ = ०$ ऐसा हुआ, चिन्हों के बदलने से $२४व^3 + २५व^2 - ८९व - ९१ = ० = फि(व)$, इसमें भी परीक्षा से जानेंगे कि व का मान १ और २ के बीच में है। इस तरह लगातार क्रिया करने से

$$य = २ + \cfrac{१}{१० + \cfrac{१}{१ + \cfrac{१}{१ + \cdots}}}$$

इस पर से आसन्नमान (हमारी शोधी भास्करीय बीज-गणित की टिप्पणी ४३—५२ पृष्ठ तक देखो)

$$\frac{२}{१}, \frac{२१}{१०}, \frac{२३}{११}, \frac{४४}{२१} \cdots\cdots\cdots\cdots$$

य का वास्तव मान और $\frac{४४}{२१}$ का अन्तर $\frac{१}{२१(२१+११)}$

$=\frac{१}{६७२}$ इससे कम होगा।

फ(२), फ′(२), $\frac{१}{२}$फ″(२) इत्यादि के मान लाघव से जानने के लिये हार्नर साहेब की क्रिया करनी चाहिए (३७वें प्रक्रम का विशेष देखो)

१५१—यदि अ और अ+१ इनके बीच फ(य)=० इसका एक से अधिक अव्यक्त मान हो तो स्टर्म के सिद्धान्त से वा किसी युक्ति से समझ लो कि अ और अ+१ के बीच कितने अव्यक्त के मान हैं और अ से आगे किन किन भिन्नाङ्कों का एक एक मान पड़ा है। फ(य)=० इस पर से ३६वें प्रक्रम से एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसमें अव्यक्त मान, दिए हुए समीकरण के अव्यक्त मान से उस भिन्नाङ्क के हरगुणित तुल्य हो जिस भिन्न और अ के बीच में य का एक मान हो। यदि दो भिन्नों के बीच में एक य का मान पड़ा हो तो उन भिन्नों के

हरों के लघुतमापवर्त्य गुणित य के मान तुल्य जिसमें अव्यक्त के मान हों ऐसा नया समीकरण बनालो।

अब इस नये समीकरण में स्पष्ट है कि एक एक अव्यक्त का मान अवश्य दो पास की अभिन्न संख्याओं के भीतर होगा। अब १५०वें प्रक्रम से इस नये समीकरण में अव्यक्त का आसन्न मान निकालो। पहिले समीकरण के अव्यक्त मान से जै गुणित नये समीकरण के अव्यक्त मान हों उससे नये समीकरण के आसन्न मान में भाग दे देने से पहिले समीकरण में अव्यक्त के आसन्न मान आवेंगे। जैसे

उदाहरण—(१) $य^{३} - ७य + ७ = ०$ इसमें ७३वें प्रक्रम से स्पष्ट है कि सब मान संभाव्य है और स्टर्म के सिद्धान्त से जान पड़ेगा कि एक मान १ और $\frac{३}{२}$ के बीच, दूसरा मान $\frac{३}{२}$ और २ के बीच में है; इसलिये ३६ वें प्रक्रम से $य = \frac{य'}{२}$ ऐसा मानने से नया समीकरण $\left(\frac{य'}{२}\right)^{३} - ७\frac{य'}{२} + ७ = ०$ छेदगम से $य'^{३} - २८य' + ५६ = ०$ ऐसा होगा, इसमें अब एक मान २ और ३ के बीच, दूसरा ३ और ४ के बीच होगा।

दो और तीन के बीच जो मान पड़ा है उसके जानने के लिये मान लो कि $य = २ + \frac{१}{र}$ तो

$$फ(य') = य'^{३} - २८य' + ५६,\ फ'(य') = ३य'^{२} - २८,\ \frac{१}{२}फ''(य') = ३य'$$

$$\therefore\ फ(२) = २^{३} - २८\cdot२ + ५६ = ८$$

$$फ'(२) = ३\cdot२^२ - २८ \qquad = -१६$$

$$\frac{१}{२} फ''(२) = ३\cdot२ \qquad = ६$$

इसलिये र के रूप में समीकरण $८र^३ - १६र^२ + ६र + १ = ० = फा(र)$, यहां यदि र = १ तो फा (र) ऋण और र = २ तो फा (र) धन होता है; इसलिये र, १ और २ के बीच में पड़ा।

मान लो कि $र = १ + \frac{१}{ल}$ तो

$$फा(र) = ८र^३ - १६र^२ + ६र + १$$

$$फा'(र) = २४र^२ - ३२र + ६$$

$$\frac{१}{२} फा''(र) = २४र - १६$$

$$\frac{१}{३!} फा'''(र) = ८$$

इसलिये

$$फा(१) = ८\cdot१^३ - १६\cdot१^२ + ६\cdot१ + १ = -१$$

$$फा'(१) = २४\cdot१^२ - ३२\cdot१ + ६ \qquad = -२$$

$$\frac{१}{२} फा''(१) = २४\cdot१ - १६ \qquad = ८$$

$$\frac{१}{३!} फा'''(१) = ८ \qquad = ८$$

इसलिये र के रूप में समीकरण

$$-ल^३ - २ल^२ + ८ल + ८ = ०$$

चिन्हों के बदलने से $ल^३ + २ल^२ - ८ल - ८ = ० = फि(ल)$ यहां यदि ल = २ तो फि (ल) ऋण और ल = ३ तो फि (ल) धन होता है; इसलिये दो और तीन के बीच में ल हुआ। मान लो कि

$$\text{ल} = २ + \frac{१}{\text{व}} \text{ तो}$$

$$\text{फि}(\text{ल}) = \text{ल}^{३} + २\text{ल}^{२} - ८\text{ल} - ८$$

$$\text{फि}'(\text{ल}) = ३\text{ल}^{२} + ४\text{ल} - ८$$

$$\frac{१}{२}\,\text{फि}''(\text{ल}) = ३\text{ल} + २$$

$$\frac{१}{३!}\,\text{फि}''(\text{ल}) = १$$

इसलिये

$$\text{फि}(२) = २^{३} + २{\cdot}२ - ८{\cdot}२ - ८ = -८$$

$$\text{फि}'(२) = ३{\cdot}२^{२} + ४{\cdot}२ - ८ \qquad = १२$$

$$\frac{१}{२}\,\text{फि}''(२) = ३{\cdot}२ + २ \qquad = ८$$

$$\frac{१}{३!}\,\text{फि}'''(२) = १ \qquad = १$$

इसलिये व के रूप में समीकरण

$-८\text{व}^{३} + १२\text{व}^{२} + ८\text{व} + १$, चिन्हों के बदल देने से

$८\text{व}^{३} - १२\text{व}^{२} - ८\text{व} - १ = \text{फी}(\text{व})$ ।

यहां यदि $\text{व} = २$ तो फी (व) ऋण और $\text{व} = ३$ तो फी (व) धन होता है; इसलिये २ और ३ के बीच में व हुआ। इस प्रकार लगातार करने से

$$\text{य}' = २ + \cfrac{१}{१ + \cfrac{१}{२ + \cfrac{१}{२ + \cdots\cdots}}}$$

इससे आसन्न मान

$$\frac{२}{१}, \frac{३}{१}, \frac{८}{३}, \frac{१९}{७} \cdots\cdots\cdots$$

इनमें २ का भाग देने से य के आसन्न मान

$$\frac{१}{१}, \frac{३}{२}, \frac{४}{३}, \frac{१९}{१४}$$

यहां वास्तव मान और $\frac{१९}{१४}$ इसका अन्तर $\frac{१}{१४(७+३)} = \frac{१}{१४०}$ इससे अल्प होगा।

३ और ४ के बीच में जो य′ का मान है उसके जानने के लिये मान लो कि $य = ३ + \frac{१}{र}$ तो

$$फ(३) = ३^३ - २८ \cdot ३ + ५६ = - १$$

$$फ'(३) = ३ \cdot ३^२ - २८ \qquad = - १$$

$$\frac{१}{२} फ''(३) = ३ \cdot ३ \qquad = ९$$

$$\frac{१}{३!} फ'''(३) = १ \qquad = १$$

इसलिये र के रूप में समीकरण

$$-र^३ - र^२ + ९र + १ \qquad = ०,$$ चिन्हों के बदलनेसे

$$र^३ + र^२ - ९र - १ \qquad = ० = फा(र)$$

यहां $र = २$ तो $फा(र)$ ऋण और $र = ३$ तो $फा(र)$ धन होता है; इसलिये र, २ और ३ के बीच में हुआ।

मान लो कि $र = २ + \frac{१}{ल}$ तो

$$फा(र) = र^३ + र^२ - ९र - १$$
$$फा'(र) = ३र^२ + २र - ९$$
$$\frac{१}{२}फा''(र) = ३र + १$$
$$\frac{१}{३!}फा'''(र) = १$$

इसलिये

$$फा(२) = २^३ + २^२ - ९{\cdot}२ - १ = -७$$
$$फा'(२) = ३{\cdot}२^२ + २{\cdot}२ - ९ = ७$$
$$\frac{१}{२}फा''(२) = ३{\cdot}२ + १ = ७$$

इसलिये ल के रूप में समीकरण

$-७ल^३ + ७ल^२ + ७ल + १ = ०$, चिन्हों के बदल देने से

$७ल^३ - ७ल - ७ल - १ = ० = फि(ल)$, यहां $ल = १$

तो फि (ल) ऋण और $ल = २$ तो फि (ल) धन होता है इसलिये ल, १ और २ के बीच में हुआ।

मानो कि $ल = १ + \frac{१}{व}$ तो

$$फि(ल) = ७ल^३ - ७ल^२ - ७ल - १$$
$$फि'(ल) = २१ल^२ - १४ल - ७$$
$$\frac{१}{२}फि''(ल) = २१ल - ७$$
$$\frac{१}{३!}फि'''(ल) = ७$$

इसलिये

$$फि(१) = ७{\cdot}१^३ - ७{\cdot}१^२ - ७{\cdot}१ - १ = -८$$
$$फि'(१) = २१{\cdot}१^२ - १४{\cdot}१ - ७ = ०$$
$$\frac{१}{२}फि''(१) = २१{\cdot}१ - ७ = १४$$

इसलिये व के रूप में समीकरण

$$-८व^{३} + १४व + ७ = ०$$ । चिन्हों के बदलने से

$$८व^{३} - १४व - ७ = ० = फी (व)$$

यहां व = १ तो फी (व) ऋण और व = २ तो फी (व) धन होता है; इसलिये १ और २ के बीच में व हुआ।

इस तरह लगातार क्रिया करने से

$$य' = ३ + \cfrac{१}{२ + \cfrac{१}{१ + \cfrac{१}{१ + \cdots\cdots}}}$$

इस पर से आसन्न मान $\frac{३}{१}$, $\frac{७}{२}$, $\frac{१०}{३}$, $\frac{१७}{५}$ ...इनमें २ का भाग देने से

य के आसन्न मान

$$\frac{३}{२}, \frac{७}{४}, \frac{५}{३}, \frac{१७}{१०} ।$$

यहां वास्तव मान और $\frac{१७}{१०}$ का अन्तर $\frac{१}{१० (५ + ३)} = \frac{१}{८०}$ इससे अल्प होगा।

$य^{३} - ७य - ७ = ०$ इस समीकरण में ७३वें प्रक्रम से सिद्ध है कि एक अव्यक्त मान ऋण होगा। इसलिये य के स्थान में $-य$ के उत्थापन से जो नया समीकरण बनेगा उसमें धन अव्यक्त मान के जो आसन्न मान लग्रांज की क्रिया से आवेंगे वे आदि समीकरण य के ऋणात्मक मान के आसन्न मान होंगे।

अथवा यहां द्वितीय पद $य^{२}$ के गुणक के शून्य होने से स्पष्ट है कि तीनों मानों का योग शून्य है; इसलिये ऊपर के दो

धनात्मक आसन्न मानों के योग को शून्य में घटा देने से शेष ऋणात्मक मान के आसन्न मान होंगे। इस प्रकार यदि पहिले धनात्मक मान के आसन्न मान $मा_1$ और दूसरे धनात्मक मान के आसन्न मान $मा_2$ तुल्य बनाए गए हों तो इन पर से अङ्कपाश की युक्ति से ऋणात्मक मान के आसन्न मान $मा_1 मा_2$ इतने बनेंगे।

१५२—ल्यागरांज की क्रिया को लगातार करने से कभी ऐसा भी होगा कि कहीं पर बने हुए समीकरण का अव्यक्त मान कोई अभिन्न धनात्मक संख्या हो। ऐसी स्थिति में उसी स्थान पर क्रिया रुक जायगी और अव्यक्त का मान एक भिन्न परिच्छिन्न मान के तुल्य होगा। परन्तु पहिले ही परिच्छिन्न मानानयन की युक्ति से यदि परिच्छिन्न मान जान कर दिए हुए समीकरण में उस मान सम्बन्धी जो अव्यक्त खण्ड का गुणय गुणक रूप अवयव हो उसे अलग कर ऐसा समीकरण बना लिया जाय जिसमें परिच्छिन्न मान न हो तब इस समीकरण में आसन्न मान के लिये ल्यागरांज की क्रिया में ऐसा कोई समीकरण न बनेगा जिसमें कोई परिच्छिन्न मान आवे।

१५३—ल्यागरांज की क्रिया करने में ऐसा भी संभव है कि क्रिया करते करते कहीं पर एक ऐसा समीकरण बन जाय जो कि पीछे बने हुए समीकरणों में से किसी एक के स्वरूप के तुल्य हो जाय, केवल अव्यक्त का कोई भेद हो तब स्पष्ट है कि वितत भिन्न की लब्धि फिर फिर वही आवेंगी और आसन्न मान करणी रूप होगा। ऐसे वितत भिन्न का मान एक वर्ग समीकरण से द्विविध वर्गात्मक करणी के रूप में आवेगा।

और ये द्विविध मान दिए हुए समीकरण में भी अव्यक्त के मान होंगे। (मेरी शोधी भास्करीय बीजगणित के ६०—६५ पृष्ठों को देखो)

१५४—आसन्न मान जानने के लिए हार्नर साहेब की युक्ति—कल्पना करो कि $फ(य) = ०$ यह एक समीकरण है तो $फ(अ + य) = ०$ यह एक ऐसा समीकरण होगा जिसमें जितने अव्यक्त मान होंगे वे पहिले समीकरण के अव्यक्त मानों से अतुल्य संख्या में न्यून होंगे। और $फ(अ + य) = ०$ का रूप ३७वें प्रक्रम से

$$फ(अ) + य फ'(अ) + य^{२} \frac{फ''(अ)}{२!} + य^{३} \frac{फ'''(अ)}{३!} + \cdots\cdots$$

$$+ य^{न} \frac{फ^{न}(अ)}{न!} = ०$$ ऐसा होगा।

इस पर से हार्नर ने यह रीति निकाली है कि पहिले दिए हुए समीकरण में जान लो कि किन दो संख्याओं के बीच में अव्यक्त का एक धनात्मक मान है, जैसे मान लो कि अ से अधिक अव्यक्त का मान जान पड़ा तब अ और दिए हुए समीकरण से ऐसा एक समीकरण बनाओ जिसमें अव्यक्त मान पहिले के अव्यक्त मान से अतुल्य न्यून हो फिर इस समीकरण में जान लो कि किस संख्या से अधिक अव्यक्त का धनात्मक मान है। फिर इस संख्या का और नये बने समीकरण पर से दूसरा एक समीकरण ऐसा बनाओ जिसमें के अव्यक्त मान पिछले समीकरणों के अव्यक्त मानों से तुल्य न्यून हों

फिर इस दूसरे समीकरण में भी पूर्ववत् वास्तव अव्यक्तमान का पता लगाओ फिर उस मान से तीसरा नया समीकरण बनाओ इस तरह अन्त में सब संख्याओं के तुल्य फ (य) = ० इसमें य का धनात्मक मान होगा।

इस क्रिया में लाघव से फ (अ), फ′ (अ), $\frac{फ''}{२!}$ (अ), $\frac{फ'''(अ)}{३!}$ इत्यादि के मान जानने ही के लिये हार्नर ने सुगम रीति निकाली है जो ३७ प्रक्रम में विशेष लिख आये हैं।

फ (य) = ० इसमें पहिले यदि इसका पता लगाओ कि अ$१०^{म}$ (अ + १) $१०^{म}$ के बीच में मान है तो वास्तव मान के अन्तिम स्थानीय अङ्क का मान अ होगा। और पहिले नये समीकरण में अव्यक्त का मान ० और $१०^{म}$ होगा। मान लो कि $१०^{म-१}$ और $१०^{म}$ के भीतर इसका अव्यक्त मान है तो मुख्य समीकरण में वास्तव अव्यक्तमान की उपान्तिम स्थानीय संख्या क हुई और दूसरे नये समीकरण में अव्यक्त मान ० और $१०^{म} - क१०^{म-१} = १०^{म-१}$ (१० − क) के बीच में होगा फिर इसमें जानो कि अव्यक्तमान ग$१०^{म-२}$ और $१०^{म-१}$(१० − क) के बीच में है। इस तरह से लगातार क्रिया करने से वर्गमूल वा घनमूल के आनयन के ऐसा अन्त स्थान से वास्तव अव्यक्त मान के सब अंक विदित होते जायेंगे। जैसे

उदाहरण—(१) $२य^{३} - ८९य^{२} + २४५य + २६६ = ०$

इसमें परीक्षा से जान पड़ा कि अव्यक्त का एक मान ४० और ५० के बीच में है तो हार्नर की रीति से फ (अ), फ′ (अ) इत्यादि के मान जो कि नये समीकरण में पदों के गुणक होंगे।

सीढ़ी के ऐसी जो जो रेखायें हैं उनके नीचे प्रत्येक नये समीकरण के द्वितीयादि पदों के गुणक हैं। प्रथम पद का गुणक प्रत्येक समीकरण में वही होता है जो मुख्य समीकरण में प्रथम पद का गुणक है। जैसे यहां पहिला नया समीकरण $२य^३ + १५१य^२ + २७२५य - १५५६ = ०$ यह होगा जिसमें १ और २ के बीच में अव्यक्तमान है फिर इससे दूसरा नया समीकरण $२य^३ + १५७य^२ + ३०३३य - १५५६$ यह होगा जिसमें ठीक ठीक $य = ·५$ है।

यदि यहां दूसरे नये समीकरण में य का मान ठीक ठीक ·५ न होता तो फिर ·५ पर से और इस दूसरे नये समीकरण से तीसरा नया समीकरण बनाया जाता है और फिर इसमें पता लगाना होता कि किन किन दो दशमलवों के बीच में इसका अव्यक्तमान पड़ा है।

(२) २०य³ − ६७य² − १५४य − ३२१ = ० इसमें अव्यक्त के धन मान को बताओ।

इसमें परीक्षा से जान पड़ता है कि धन अव्यक्तमान ५ और ६ के बीच में है। इसलिये हार्नर की रीति से।

− ६७	− १५४	− ३२१	(५·३५
१००	१६५	− ५५	
३३	११	− २६६	
१००	६६५	२२४·३१	
१३३	६७६	− ४१·६६	
१००	७१·७	४१·६६	
२३३	७४७·७		
६	७३·५		
२३६	८२१·२		
६	१२·६		
२४५	८३३·८		
६			
२५१			
१			
२५२			

यहां पर पहिला नया समीकरण २०य³ + २३३य² + ६७६य − २६६ = ० जिसमें अव्यक्तमान ·३ और ·४ के बीच में है फिर दूसरा नया समीकरण २०य³ + २५१य² + ८२१·२य − ४१·६६ = ० जिसमें ठीक ठीक य = ·०५ ;

ऊपर के कर्म में दशमलव को यदि हटाना हो तो जिस नये समीकरण में दशमलव का संभव हो उसके अव्यक्त मानों को दशगुणित कर कर्म करना आरंभ करो अर्थात् ऊर्ध्वाधर

पंक्तिओं में जो नये समीकरण के पदों के गुणक आते हैं उनमें प्रथम पंक्ति वालों को १०, दूसरी पंक्ति वालों को १००, तीसरी पंक्ति वालों को १००० इत्यादि से गुण कर कर्म करना चाहिए। जैसे

(३) $४य^{३} - १३य^{२} - ३१य - २७५ = ०$ इसमें ऊपर की युक्ति से यदि क्रिया की जाय और पहिले जान लिया जाय कि य का वास्तव मान ६ और ७ के बीच में है तो हार्नर की रीति से फ (अ), फ′ (अ) इत्यादि के मानानयन के लिये और नये समीकरण के बनाने के लिये ३७ प्रक्रम की युक्ति से पहिले दशमलव लेकर कर्म

−१३	−३१	−२७५	
२४	६६	२१०	
११	३५	−६५	(६·२५
२४	२१०	५१·३६२	
३५	२४५	−१३·६०८	
२४	११·९६	१३·६०८	
५९	२५६·९६	०	
·८	१२·१२		
५९·८	२६९·०८		
·८	३·०८		
६०·६	२७२·१६		
·८			
६१·४			
·२			
६१·६			

यह हुआ

और दशमलव हटाने की युक्ति से

यह लाघव से कर्म हुआ।

१५५—हार्नर की रीति से जो फ(अ), फ′(अ) इत्यादि के मान आते हैं वे ही प्रत्येक सीढ़ी वाली रेखा की अन्त वाली सीढ़ी के उलटे क्रम से संख्यायें हैं। इसलिये अन्त वाली सीढ़ी के नीचे की संख्या फ(अ) और इसके पीछे वाली सीढ़ी के अन्त की संख्या फ′(अ) होगी। इसलिये जहां पर कर्म करते करते फ (अ) यह फ′(अ) से संख्यात्मक मान से छोटा हो

तहां न्यूटन की रति से $-\frac{फ(अ)}{फ'(अ)}$ यह बड़े लाघव से आगे के समीकरणों में अव्यक्त का आसन्नमान वा मुख्य समीकरण में अव्यक्त मान का और अवयव आ जायँगे; जैसे पिछले प्रक्रम के (३) उदाहरण में पहिले वार कर्म करने से $फ(अ) = -६५$ और $फ'(अ) = २४५$ इसलिये $-\frac{फ(अ)}{फ'(अ)} = \frac{६५}{२४५} = \cdot२$ स्वल्पान्तर से यह पहिले नये समीकरण में अव्यक्त का आसन्नमान और मुख्य समीकरण में अव्यक्त मान का दूसरा अवयव आ जाता है। इसी प्रकार दूसरी वार क्रिया करने में जो $फ(अ) = -१३\cdot६०८$ और $फ'(अ) = २६६\cdot०८$ ये आते हैं इनसे $-\frac{फ(अ)}{फ'(अ)} = \frac{१३\cdot६०८}{२६६\cdot०८} = \cdot०५$ स्वल्पान्तर से यह दूसरे नये समीकरण के अव्यक्त के आसन्नमान और मुख्य समीकरण के अव्यक्तमान का तीसरा अवयव आता है। इस प्रकार से दो तीन बार कर्म करने के अनन्तर (कभी कभी एक ही वार के अनन्तर) न्यूटन की रीति से सहज में नये समीकरणों के अव्यक्त के आसन्नमान का पता लग जायगा, व्यर्थ ढूढने में समय न नष्ट होगा।

१५६—यदि अव्यक्त का मान किसी नियत दशमलव स्थान तक अपेक्षित हो तो आधे दशमलव स्थान से एकाधिक स्थान तक तो हार्नर की क्रिया पूरी करो फिर प्रत्येक नये

समीकरण के पदों के जो सीढी के नीचे गुणक हैं उनमें उपान्तिम सीढी के नीचे जो गुणक है उसकी एक स्थानीय संख्या काट कर अवशिष्ट संख्या को गुणक समझो। उसके पीछे वाले गुणक में एक और दश स्थानीय दोनों संख्याओं को काट कर अवशिष्ट को गुणक समझो। इसके पीछे वाले गुणक में एक, दश और शत स्थानवाली तीन संख्याओं को काट कर अवशिष्ट को गुणक समझो। ऐसे ही एक एक अधिक स्थानवाली संख्याओं को काट काट कर गुणकों को बनाकर क्रिया करो। क्रिया करने में इसके अनन्तर जो दूसरे समीकरण के गुणक हों उनमें भी ऊपर की युक्ति से संख्याओं को काट काट कर छोटे गुणक बनाकर क्रिया करते जाओ। क्रिया करने में जहां गुणना हो तहां अन्तिम काटी हुई संख्या को भी अभिष्ट संख्या से गुण कर दशमलव के संक्षेप गुणन की युक्ति से केवल हाथ लेकर उसे एक स्थानीय संबन्धि गुणनफल में मिला कर आगे पूर्ववत् गुणन करते जाओ। जैसे—

उदाहरण—(१) $य^३ + ३य^२ - २य - ५ = ०$ इसमें आठ दशमलव स्थान तक अव्यक्त का आसन्नमान जानना है तो पहिले पांच दशमलव तक हार्नर की पूरी क्रिया करने से

यहां तक तो शून्य बढ़ाते क्रिया करने से अन्त के गुणकों से—

$य^{३} + ६९९०१५ य^{२} + ११२८७३९९००७५ य - ९८३४७५२४८७५$ $= ०$ ऐसा समीकरण होगा। इसमें स्पष्ट है कि य के स्थान में कोई एक स्थानीय दशमलव ·क के उत्थापन से और दशमलव को भिन्न बनाने से

$$\frac{१}{१०००} क^{३} + \frac{६९९०१५}{१००} क^{२} + \frac{११२८७३९९००७५}{१०} क - ९८६४७५२४८७५$$

ऐसा होगा जहां हरों के भाग दे देने से स्वल्पान्तर से

$$६९९० क^{२} + ११२८७३९९००७ क - ९८६४७५२४८७५$$

ऐसा होगा इस पर से गुणकों में स्थानीय अङ्क काटने की युक्ति उपपन्न हो जाती है। अब गुणकों के स्थानीय अंकों को नियमानुसार काट काट कर क्रिया करने से।

११२८७३९९००७५	− ९८६४७५२४८७५ (१·३३००५८७३
५५९२१	९०२९९६३९४३२
११२८७४५४९२९	− ८३४७८८५४४३
५५९२१	७९०१२६१०१८
११२८७५१०८५ ०	− ४४६६२४४२५
४८९	३३८६०५६२४
११२८७५१५७४	− १०७९९८८०१
४८९	
११२८७५२०६ ३	
२	
११२८७५२०८	
२	
११२८७५२१०	

अब यहां अन्त का समीकरण ११२८७५२१०य − १०७९९८८०१ $= ०$ यह हुआ जिसमें $य = \frac{१०७९९८८०१}{११२८७५२१०}$

यहां दशमलव के संक्षेप भागाहार की विधि से लब्धि ·९५६७८२५ आती है। इसे ऊपर के मान के आगे रख देने से मुख्य समीकरण में अव्यक्त का एक धन मान १·३३००५८७३९५६७९८२५ यह आता है।

इस प्रकार हार्नर की रीति से बड़े लाघव से बहुत दशमलव स्थानों तक आसन्नमान आता है।

अभ्यास के लिये प्रश्न।

१। $य^३ - ४य - १० = ०$ इसमें जो धन अव्यक्तमान २ और ३ के बीच में है उसका आसन्नमान न्यूटन वा कमलाकर की रीति से निकालो।

२। $य^३ - ४य^२ - ७य + २५ = ०$ इसका २ और ३ के बीच का आसन्नमान न्यूटन की रीति से निकालो।

३। $य^४ - ८य^३ + १२य^२ + ८य - ३ = ०$ इसमें जो धन मान ० और १ के बीच में है उसका आसन्नमान न्यूटन की रीति से निकालो।

४। नीचे लिखे हुए समीकरणों में न्यूटन की रीति से एक धन अव्यक्तमान का आसन्नमान निकालो।

(१) $य^३ + ३य - ४ = ०$।

(२) $य^३ + ३य^२ - ३य + १९ = ०$।

५। नीचे लिखे हुए समीकरणों में ल्यांगराज की रीति से धनाव्यक्त का आसन्नमान निकालो

(१) $३य^३ - २य^२ - ३य - २ = ०$।

(२) $य^३ - १५य - ५ = ०$।

(३) $य^3 - ६य - ११ = ०$, यहां $$य = ३ + \cfrac{१}{५ + \cfrac{१}{१ + \cfrac{१}{१ + \cdots}}}$$

६। हार्नर की रीति से नीचे लिखे हुए समीकरणों में अव्यक्त के मान निकालो।

(१) $२य^3 - ६५०\cdot८य^2 + ५य - १६२७ = ०$,

$य = ३२५\cdot४$ ।

(२) $य^3 - १२य^2 + १२य - ३ = ०$, $य = २\cdot८५८०८३$ ।

(३) $४य^3 - १८०य^2 + १८९६य - ४५७ = ०$,

$य = २८\cdot५२१२७७३८$ ।

(४) $य^3 - ४९य^2 + ६५८य - १३७९ = ०$,

$य = २\cdot५५७३५१$ ।

(५) $य^3 + २य^2 - २३य - ७० = ०$, $य = ५\cdot१३४५७८७२५२८$ ।

(६) $य^3 + य^2 - २य - १ = ०$, $य = - १\cdot८०१९४$ वा

$- \cdot४४५०४$ वा

$१\cdot२४६९८$

७। हार्नर की रीति से ६७३३७३०९७१२५ इसका घनमूल निकालो। उ० ८७६५।

८। हार्नर की रीति से ५३७८२४ इसका पञ्चघात मूल निकालो। उ० १४।

९। $य^5 + य^4 - ४य^3 - ३य^2 + ३य + १ = ०$, इसमें जो मान -१ और ० के बीच में है उसका आसन्नमान पांच दशमलव स्थान तक निकालो। उ० $- \cdot२८४६३$ ।

१० । $य^३ - ११७२.७य + ४०३८५ = ०$ इसमें दो संभाव्यमान निकालो । उ० ३·४४५९२, २१·४३०६७ ।

११ । $१४य^३ + १२य^२ - ९य - १० = ०$ इसमें धन अव्यक्त मान का आसन्नमान बताओ । उ० ०·८५९०६ ।

१२ । $७य^४ + २०य^३ + ३य^२ - १६य - ८ = ०$ इसमें धन अव्यक्तमान क्या है । उ० ०·९१३३६ ।

१३ । $य^५ + १२य^४ + ५९य^३ + १५०य^२ + २०१य - २०७ = ०$ इसमें दश दशमलव स्थान तक धनाव्यक्त का आसन्नमान निकालो । उ० ·६३८६०५८०३३ ।

१४ । $य^३ + ३०य^२ - ४००य + १००० = ०$ इसमें धनाव्यक्त के आसन्नमान बताओ । उ० ३·५६८९५८४, ६·९२०२१४७ ।

१४—मानों के तद्रूपफल

१५७—दो वा अधिक वर्णों का फल यदि ऐसा हो कि किसी दो वर्णों के परस्पर बदल देने से भी फल के मान में विकार न हो तो ऐसे फल को उन वर्णों का तद्रूपफल कहते हैं ।

जैसे यदि फ $(य,र) = य^म + र^म$ तो यहां य के स्थान में र और र के स्थान में य के बदलने से भी फ $(य,र) = र^म + य^म = य^म + र^म$ ऐसा होता है; इसलिये ऐसे य और र के फल को उनका तद्रूपफल कहते हैं । इसी प्रकार फ $(य,र,ल) = य^म + र^म + ल^म$ इसमें किसी दो को परस्पर बदलने से फल के मान में विकार

नहीं होता। इसलिये इसे और फ $(य,र,ल) = यर + यल + रल$ इसमें भी किसी दो वर्णों को परस्पर बदलने से फल में विकार नहीं होता। इसलिये इसे भी उन वर्णों के तद्रूपफल कहते हैं। इस प्रकार और भी तद्रूपफलों का उदाहरण जान लेना चाहिए।

१५८—किसी समीकरण के पदों के गुणक अव्यक्तमानों के तद्रूपफल होते हैं।

क्योंकि २५वें प्रक्रम के ५वें प्रसिद्धार्थ से

$य^{न} + प_{१}य^{न-१} + प_{२}य^{न-२} + \cdots\cdots + प_{न} = ०$ इसमें

$-प_{१} =$ सब मानों का योग।

$प_{२} =$ दो दो मानों के घात का योग।

$-प_{३} =$ तीन तीन मानों के घात का योग।

....

इनमें किसी दो मानों को परस्पर बदलने से भी स्पष्ट है कि फलों के मान में भी विकार नहीं होगा। इसलिये ये सब गुणक मानों के तद्रूपफल हैं।

इस अध्याय में यह दिखाया जायगा कि समीकरण में जो अव्यक्त के मान हैं उनके किसी करणीगत तद्रूपफल को समीकरण के पदों के गुणकों के रूप में प्रकाश कर सकते हैं। इसके पहिले नीचे लिखे हुए संकेतों से परिचय करना आवश्यक है।

१५९—फ $(य) = य^{न} + प_{१}य^{न-१} + प_{२}य^{न-२} + \cdots\cdots प_{न} = ०$ इसमें यदि अव्यक्त के मान अ, क, ख, ग.........इत्यादि हों तो

$$
(१)\quad \left.\begin{array}{l}
स_१ = अ + क + ख + ग \cdots\cdots \\
स_२ = अ^२ + क^२ + ख^२ + ग^२ \cdots\cdots \\
स_३ = अ^३ + क^३ + ख^३ + ग^३ \cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
स^म = अ^म + क^म + ख^म + ग^म \cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right\}
$$

(२) यदि फ $(अ, क, ख, ग, \cdots\cdots) = अ^म + क^म + ख^म + ग^म + \cdots\cdots$ तो (जिनमें प्रत्येक पद में एक ही अव्यक्त का घात है) ऐसे फल को प्रथम क्रम का फल कहते हैं।

(३) यदि प्रत्येक पद में दो दो मान के घातों के गुणन फल हों तो उसे दूसरे क्रम का फल कहते हैं। जैसे

फ $(अ, क, ख, ग, \cdots\cdots) = अ^म क^प + अ^म ख^प + क^म ख^प + \cdots\cdots$
इसे दूसरे या द्वितीय क्रम का फल कहते हैं। इसे लाघव से यौ $अ^म क^प$ ऐसा लिखते हैं। इसका यह अर्थ है कि अ, क, ख, ... मानों से दो दो मानों के लेने से एक का म घात और दूसरे का प घात कर परस्पर गुण देने से भिन्न भिन्न जितनी संख्यायें होंगी उनका योग = यौ $अ^म क^प$

(४) तृतीय क्रम का फल वह है जिसमें प्रत्येक पद में तीन मानों के घातों का गुणनफल हो। जैसे

फ $(अ, क, ख, ग, \cdots\cdots) = अ^म क^प ख^ब + अ^म ख^प ग^ब + अ^म क^प ग^ब + \cdots$
इसे तृतीय क्रम का फल कहते हैं और लाघव से इसे यौ $अ^म क^प ख^ब$ ऐसा लिखते हैं। इसका भी (३) के ऐसा यह अर्थ है कि मानों से $अ^म क^प ख^ब$ ऐसे जितने पद बने हैं उनका योग = यौ $अ^म क^प ख^ब$। इसी प्रकार चतुर्थ क्रम इत्यादि फल और उनके लाघव से संकेतों को समझो।

द्वितीय क्रम, तृतीय क्रम इत्यादि के फलों में यह भी जानना चाहिए कि प्रत्येक पद में मानों के घात संख्याओं का योग स्थिर है। जैसे द्वितीय क्रम के फल में सर्वत्र हेरफेर से म और प के होने से म+प स्थिर है और तृतीय क्रम के फलों में सर्वत्र हेर फेर से म, प और ब के होने से म+प+ब स्थिर है। इसी प्रकार चतुर्थ क्रम इत्यादि के फलों में भी जानो।

१६०—५३वें प्रक्रम में त, थ, द·········को एक के समान मान लेने से

$$\text{फ}'(\text{य}) = \frac{\text{फ}(\text{य})}{\text{य}-\text{अ}} + \frac{\text{फ}(\text{य})}{\text{य}-\text{क}} + \frac{\text{फ}(\text{य})}{\text{य}-\text{ख}} + \cdots\cdots\cdots$$

प्रत्येक हर से फ (य) में ८ प्रक्रम से भाग लेने पर लब्धि (जहां $\text{प}_{०} = १$ मान लेना चाहिए) अर्थात् $\frac{\text{फ}(\text{य})}{\text{य}-\text{अ}} = \text{य}^{\text{न}-१} + (\text{अ}+\text{प}_{१})\text{य}^{\text{न}-२}$

$$+(\text{अ}^{२}+\text{प}_{१}\text{अ}+\text{प}_{२})\text{य}^{\text{न}-३}+\cdots\cdots\cdots$$

$$+(\text{अ}^{\text{म}}+\text{प}_{१}\text{अ}^{\text{म}-१}+\text{प}_{२}\text{अ}^{\text{म}-२}+\cdots\cdots\cdots+\text{प}_{\text{म}})\text{य}^{\text{न}-\text{म}-१}+\cdots$$

इसी चाल की लब्धि फ (य) में य—क, य—ख, इत्यादि के भाग देने से आवेगी। इसलिये सब लब्धिओं के जोड़ने से

$$\text{फ}'(\text{य}) = \text{न}\text{य}^{\text{न}-१} + (\text{स}_{१}+\text{न}\text{प}_{१})\text{य}^{\text{न}-२} + (\text{स}_{२}+\text{प}_{१}\text{स}_{१} + \text{न}\text{प}_{२})\text{य}^{\text{न}-३}+\cdots\cdots$$

$$(\text{स}_{\text{म}}+\text{प}_{१}\text{स}_{\text{म}-१}+\text{प}_{२}\text{स}_{\text{म}-२}+\cdots\cdots\cdots+\text{न}\text{प}_{\text{म}})\text{य}^{\text{न}-\text{म}-१}+\cdots$$

परन्तु $\text{फ}'(\text{य}) = \text{न}\text{य}^{\text{न}-१} + (\text{न}-१)\text{प}_{१}\text{य}^{\text{न}-२}$

$$+(\text{न}-२)\text{प}_{२}\text{य}^{\text{न}-३}+\cdots\cdots+(\text{न}-\text{म})\text{प}_{\text{म}}\text{य}^{\text{न}-\text{म}-१}+\cdots\cdots$$

दोनों समीकरणों में य के समान घातों के गुणक समान करने से

$स_१ + न_१प_१ + = (न - १)प_१$ वा $स_१ + प_१ = ०$

$स_२ + प_१स_१ + नप_२ = (न - २)प_२$ वा $स_२ + प_१स_१ + २प_२ = ०$

साधारण से—

$$स_म + प_१स_{म-१} + प_२स_{म-२} + \cdots\cdots + नप_म = (न - म)प_म$$

$$\text{वा } स_म + प_१स_{म-१} + प_२स_{म-२} + \cdots\cdots + मप_म = ०$$

इसमें यह मान लिया गया है कि $म < न$ ।

इसमें पिछले का उत्थापन देने से $स_२, स_३$, इत्यादि के मान समीकरण के पदों के गुणकों के रूप में आजायंगे । जैसे

$स_१ + प_१ = ० \therefore स_१ = -प_१$ यह २५वें प्रक्रम के ५ वें प्र० सि० से भी सिद्ध है ।

$स_२ + प_१स_१ + २प_२ = स_२ - प^२_१ + २प_२ = ० \therefore स_२ = प^२_१ - २प_२$ यह ३३वें प्रक्रम में भी सिद्ध हुआ है ।

$$\begin{aligned} स_३ + प_१स_२ + प_२स_१ + ३प_३ &= स_३ + प^३_१ - २प_१प_२ \\ &\quad - प_१प_२ + ३प_३ \\ &= स_३ + प^३_१ - ३प_१प_२ + ३प_३ = ० \end{aligned}$$

$\therefore स_३ = ३प_१प_२ - प^३_१ - ३प_३$, यही दूसरे अध्याय के अभ्यास के लिये जो प्रश्न हैं उनमें ८वें प्रश्न का उत्तर है । इस प्रकार आगे के समीकरण में पिछले $स_१ स_२$ इत्यादि के उत्थापन से स्पष्ट है कि $स_१, स_२, स_३$ इत्यादि के मान समीकरण के पदों के गुणकों के रूप में आवेंगे ।

यदि $म > न$ तो $फ(य) = ०$ इसे $य^{म-न}$ इससे गुण देने से

$य^म + प_१य^{म-१} + प_२य^{म-२} + \cdots\cdots\cdots + प_नय^{म-न} = ०$ ऐसा होगा इसमें य के स्थान में क्रम से य के मान अ, क, ख इत्यादि के उत्थापन से

$$अ^{म} + प_{१}अ^{म-१} + प_{२}अ^{म-२} + \cdots\cdots + प_{न}अ^{म-न} = ०$$
$$क^{म} + प_{१}क^{म-१} + प_{२}क^{म-२} + \cdots\cdots + प_{न}क^{म-न} = ०$$
....

सब को जोड़ देने से

$$स_{म} + प_{१}स_{म-१} + प_{२}स_{म-२} + \cdots\cdots + प_{न}स_{म-न} = ०$$

अब इस पर से म के स्थान में $न+१$, $न+२$, इत्यादि के उत्थापन से और $स_{न}$, $स_{न-१}$ इत्यादि के मानों से $स_{न+१}$, $स_{न+२}$ इत्यादि के मान समीकरण के पदों के गुणकों के रूप में आजायँगे, ऊपर जो रीति मानों के घातयोग जानने के लिये दिखलाई गई है उसे न्यूटन ने निकाला है इसलिये इसे न्यूटन की रीति कहते हैं।

व्यवहार में नीचे की युक्ति से सुभीता पड़ेगा।

यह सिद्ध है कि

$$फ'(य) = \frac{फ(य)}{य-अ} + \frac{फ(य)}{य-क} + \frac{फ(य)}{य-ख} + \cdots\cdots\cdots$$

इसलिये

$$\frac{य\,फ'(य)}{फ(य)} = \frac{य}{य-अ} + \frac{य}{य-क} + \frac{य}{य-ख} + \cdots\cdots\cdots$$
$$= \left(१-\frac{अ}{य}\right)^{-१} + \left(१-\frac{क}{य}\right)^{-१} + \left(१-\frac{ख}{य}\right)^{-१} + \cdots$$
$$= न + \frac{स_{१}}{य} + \frac{स_{२}}{य^{२}} + \frac{स_{३}}{य^{३}} + \cdots\cdots\cdots$$

इसलिये $य\,फ'(य)$ इसमें बीजगणित की साधारण रीति से $फ(य)$ का भाग देने से लब्धि में जो $\frac{१}{य}$, $\frac{१}{य^{२}}$, इत्यादि के गुणक होंगे वे $स_{१}$, $स_{२}$ इत्यादि के मान आ जायँगे।

१६१—फ(य) = ० इसमें मानों के ऋणात्मक घातों का योग जानना हो तो फ(य) में $य = \frac{१}{र}$ ऐसा मानने से जो र के रूप में समीकरण बनेगा उसमें र के मानों के वही धनात्मक घातों के योग का जो मान होगा वही य के मानों के ऋणात्मक घातों का योग होगा क्योंकि $य = \frac{१}{र}$ $\therefore र = \frac{१}{य}$ और $र^{म} = \frac{१}{य^{म}} = य^{-म}$। अथवा ऊपर के प्रक्रम में जो

$$स_{म} + प_{१}स_{म-१} + प_{२}स_{म-२} + \cdots\cdots + प_{न}स_{म-न} = ०$$

यह सिद्ध हुआ है इसमें म के स्थान में न − १, न − २, न − ३, इत्यादि के उत्थापन से पूर्वयुक्ति से $स_{-१}$, $स_{-२}$, इत्यादि के मान आ जायँगे।

१६२—यौ $अ^{म}क^{प}$ इसका मान जानने के लिये उपाय पूर्वसिद्ध है कि

$$स_{म} = अ^{म} + क^{म} + ख^{म} + \cdots\cdots\cdots$$

$$स_{प} = अ^{प} + क^{प} + ख^{प} + \cdots\cdots\cdots$$

दोनों के गुणन से

$$स_{म}स_{प} = अ^{म+प} + क^{म+प} + ख^{म+प} + \cdots\cdots\cdots$$
$$+ अ^{म}क^{प} + अ^{म}ख^{प} + क^{म}अ^{प} + \cdots\cdots\cdots$$
$$= स_{म+प} + यौ\ अ^{म}क^{प}$$

$$इसलिये\ यौ\ अ^{म}क^{प} = स_{म}स_{प} - स_{म+प} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (१)$$

इसमें यह मान लिया गया है कि म और प परस्पर अतुल्य हैं। यदि म = प तो यौ $अ^{म}क^{प}$ इसमें दो दो तुल्य होंगे। इसलिये

यौ $अ^{म}क^{प} = २$ यौ $(अक)^{म}$ और तब (१) से २यौ $(अक)^{म}$
$= स_{म}^{२} - स_{२म}$ ।

१६३—इसी प्रकार तृतीय क्रम फल यौ $अ^{म}क^{प}ख^{ब}$ इसका मान जानना हो तो

$$यौ\ अ^{म}क^{प} = अ^{म}क^{प} + क^{म}ख^{प} + अ^{म}ख^{प} + \cdots\cdots$$
$$स_{ब} = अ^{ब} + क^{ब} + ख^{ब} + \cdots\cdots\cdots\cdots$$

दोनों के गुणन से

$$स_{ब}\ यौ\ अ^{म}क^{प} = अ^{म+ब}क^{प} + क^{म+ब}ख^{प} + ख^{म+ब}अ^{प} + \cdots\cdots$$
$$+ अ^{म}क^{प+ब} + क^{म}ख^{प+ब} + ख^{म}अ^{प+ब} + \cdots\cdots$$
$$+ अ^{म}क^{प}ख^{ब} + \cdots\cdots\cdots$$

दक्षिण पक्ष में तीन प्रकार के समूह हैं जिन्हें १५६वें प्रक्रम की संकेत युक्ति से क्रम से यौ $अ^{म+ब}क^{प}$, यौ $अ^{म}क^{प+ब}$ और यौ $अ^{म}क^{प}ख^{ब}$ इन संकेतों से प्रकाश कर सकते हैं। इसलिये

$$स_{ब}\ यौ\ अ^{म}क^{प} = यौ\ अ^{म+ब}क^{प} + यौ\ अ^{म}क^{प+ब} + यौ\ अ^{म}क^{प}ख^{ब}$$

१६२वें प्रक्रम के (१) से यौ $अ^{म}क^{प}$, यौ $अ^{म+ब}क^{प}$ और यौ $अ^{म}क^{प+ब}$ = यौ $अ^{प+ब}क^{म}$ के मान रखने से और समशोधन से

$$यौ\ अ^{म}क^{प}ख^{ब} = स_{म}स_{प}स_{ब} - स_{ब}स_{म+प} - स_{म+ब}स_{प} + स_{म+प+ब}$$
$$- स_{म}स_{प+ब} + स_{म+प+ब}$$
$$= स_{म}स_{प}स_{ब} - स_{ब}स_{म+प} - स_{म+ब}स_{प} - स_{म}स_{प+ब} + २स_{म+प+ब} \cdots (१)$$

यहां भी यह मान लिया है कि म, प और ब अतुल्य हैं। यदि म = प तो १६२वें प्रक्रम से

$$२\ यौ\ (अक)^{म}ख^{प} = स_{म}^{२}स_{ब} - स_{२म}स_{ब} - स_{म+ब}स_{म} - स_{म+ब}स_{म}$$
$$+ २स_{२म+ब}$$
$$= स_{म}^{२}स_{ब} - स_{२म}स_{ब} - २स_{म+ब}स_{म} + २स_{२म+ब}, \cdots (२)$$

यदि म = प = व तो यौ $अ^{म}क^{प}ख^{व}$ इसमें ६,६ पद समान होंगे; इसलिये यौ $अ^{म}क^{प}ख^{व}$ = १·२·३ यौ $(अ\ क\ ख)^{म}$

तब ६ यौ $(अ\ क\ ख)^{म} = स^{३}_{म} - ३स_{२म}स_{म} + २स_{३म}$ ......(३)

इसी प्रकार यौ $अ^{म}क^{प}ख^{व}$ के मान से ऊपर ही की युक्ति से यौ $अ^{म}क^{प}ख^{फ}ग^{भ}$ इत्यादि के मान भी जान सकते हो।

यदि म = प = व = भ,.........इत्यादि त संख्यायें परस्पर समान हों तो अङ्कपाश की युक्ति से १·२·३......त, इतने पदों में समान ही होंगे। इसलिये तब यौ $अ^{म}क^{प}ख^{व}ग^{भ}$.... = १·२·३ ......त यौ $(अ\ क\ ख\ ग......)^{म}$ ऐसा होगा।

इस प्रकार से सिद्ध हो गया कि मानों के द्वितीय, तृतीय इत्यादि क्रम के फलों के मानों का योग समीकरण के पदों के गुणकों के रूप में आता है।

१९४—१६०वें प्रक्रम में मानों के वर्गादि योग के लिये जो न्यूटन की रीति दिखलाई गई है उसमें पिछले योगों के वश से तब अगले योग का मान निकलता है; इस प्रक्रम में बिना पिछले योगों के जाने इष्टघात संबन्धि योग जानने के लिये रीति दिखलाते हैं।

मान लो कि फ (य) = ० इसमें य के मान अ,क,ख,ग, हैं। और समीकरण न घात का है तो

$$फ(य) = (य - अ)(य - क)(य - ख)(य - ग)..............$$

दोनों में $य^{न}$ का भाग देने से

$$\frac{फ(य)}{य^{न}} = \left(१ - \frac{अ}{य}\right)\left(१ - \frac{क}{य}\right)\left(१ - \frac{ख}{य}\right)\left(१ - \frac{ग}{य}\right)........$$

दोनों पक्षों का लघुरिक्थ लेने से

$$\text{ला}\frac{\text{फ}(\text{य})}{\text{य}^{\text{न}}} = -\frac{1}{\text{य}}(\text{अ}+\text{क}+\text{ख}+\cdots\cdots)$$

$$-\frac{1}{2\text{य}^2}(\text{अ}^2+\text{क}^2+\text{ख}^2+\cdots\cdots)$$

$$-\frac{1}{3\text{य}^3}(\text{अ}^3+\text{क}^3+\text{ख}^3+\cdots\cdots)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots)$$

$$= -\frac{\text{स}_1}{\text{य}} - \frac{\text{स}_2}{2\text{य}^2} - \frac{\text{स}_3}{3\text{य}^3} - \cdots - \frac{\text{स}^{\text{म}}}{\text{मय}^{\text{म}}}$$

इसलिये $\text{ला}\frac{\text{फ}(\text{य})}{\text{य}^{\text{न}}}$ इसमें य के म घात का जो गुणक $\text{गु}_{\text{म}}$ हो तो $-\text{गु}_{\text{म}} = \frac{\text{स}_{\text{म}}}{\text{म}}$ $\therefore$ $\text{स}_{\text{म}} = -\text{मगु}_{\text{म}}$ ।

जैसे उदाहरण—(१) $\text{य}^2 - \text{पय} + \text{ब} = 0$ इसमें

$$\frac{\text{फ}(\text{य})}{\text{य}^{\text{न}}} = \frac{\text{फ}(\text{य})}{\text{य}^2} = 1 - \left(\frac{\text{प}}{\text{य}} - \frac{\text{ब}}{\text{य}^2}\right) \text{ इसलिये}$$

$$-\text{ला}\frac{\text{फ}(\text{य})}{\text{य}^{\text{न}}} = -\text{ला}\left\{1 - \left(\frac{\text{प}}{\text{य}} - \frac{\text{ब}}{\text{य}^2}\right)\right\}$$

$$= \frac{\text{प}}{\text{य}} - \frac{\text{ब}}{\text{य}^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\text{प}}{\text{य}} - \frac{\text{ब}}{\text{य}^2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\text{प}}{\text{य}} - \frac{\text{ब}}{\text{य}^2}\right)^3$$

$$+\cdots\cdots+\frac{1}{\text{म}}\left(\frac{\text{प}}{\text{य}} - \frac{\text{ब}}{\text{य}^2}\right)^{\text{म}}$$

सब पदों में से चुन लेने से $\frac{1}{\text{य}_{\text{म}}}$ का गुणक अब जान सकते हो। ऊपर के मान को उलटे क्रम से लिखने से

$$\frac{१}{म}\left(\frac{प}{य}-\frac{ब}{य^{२}}\right)^{म}+\frac{१}{म-१}\left(\frac{प}{य}-\frac{ब}{य^{२}}\right)^{म-१}$$
$$+\frac{१}{म-२}\left(\frac{प}{य}-\frac{ब}{य^{२}}\right)^{म-२}+\cdots\cdots\cdots$$

इसमें $\frac{१}{य^{म}}$ गुणकों को इकट्ठा करने से $\frac{१}{य^{म}}$ का गुणक

$$गु_{म}=\frac{१}{म}प^{म}-\frac{१}{म-१}प^{म-२}ब$$
$$+\frac{१}{म-२}\frac{(म-२)(म-३)}{२!}प^{न-४}ब^{२}\cdots\cdots\cdots \text{इसलिये}$$

$$स_{म}=प^{म}-मप^{म-२}ब+\frac{म(म+३)}{२!}प^{म-४}ब^{२}-\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{त(-१)म(म-त-१)\cdots\cdots\cdots(म-२त-१)}{त!}प^{म-२त}ब^{त}+\cdots$$

१६५—$फ(य)=य^{न}+प_{१}य^{न-१}+प_{२}य^{न-२}+प_{३}य^{न-३}$
$+\cdots\cdots\cdots+प_{न}$

$\equiv(य-अ)(य-क)(य-ख)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

जहां फ (य) = ० इसमें अव्यक्त के मान अ, क, ख,···हैं। ऊपर के सरूप समीकरण में य के स्थान में $\frac{१}{र}$ का उत्थापन देने से $१+प_{१}र+प_{२}र^{२}+प_{३}र^{३}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+प_{न}र^{न}$ $\equiv(१-अर)(१-कर)(१-खर)\cdots\cdots\cdots$(सरूप समीकरणों की समता दिखाने के लिये $\equiv$ चिन्ह लिखते हैं। जिन दो अव्यक्त-राशिओं के बीच ऐसा चिन्ह देखो समझो कि सरूप समीकरण हैं जहां दोनों पक्षों के अव्यक्त के स्थान में चाहे जिस संख्या का

दो सर्वदा दोनों पक्ष सम रहेंगे।) ऊपर के सरूपसमीकरण में उत्थापन दोनों पक्षों का लघुरिक्थ लेने से और

$$(च + छ + ज + \cdots\cdots)र = \left.\begin{array}{r} च \\ +छ \\ +ज \end{array}\right| र$$ ऐसे संकेत से लिखने से

$$\begin{array}{l|l|l|l|l} प_१र + प_२ & र^२ + प_३ & र^३ + प_४ & र^४ + प_५ & र^५ + \cdots + पा_तर^त \\ \quad -\frac{१}{२}प_१^२ & \quad -प_१प_२ & \quad -प_१प_३ & \quad -प_२प_३ & \qquad +\cdots \\ & \quad +\frac{१}{३}प^३ & \quad -\frac{१}{२}प_१^२ & \quad +प_१प_२^२ & \\ & & \quad +प_१^२प_२ & \quad +प_१^२प_३ & \\ & & \quad -\frac{१}{४}प_१^४ & \quad -प_१प_४ & \\ & & & \quad -प_१^३प_२ & \\ & & & \quad +\frac{१}{५}प_१^५ & \end{array}$$

$$\equiv -स_१र - \frac{१}{२}स_२र^२ - \frac{१}{३}स_३र^३ - \cdots\cdots - \frac{१}{त}स_तर^त - \cdots\cdots$$

दोनों पक्षों में $र^त$ का गुणक समान करने से

$स_त = -तपा_त$ जहां $पा_त$, ला $र^त\, फ\left(\frac{१}{र}\right)$ इसमें $र^त$ का गुणक है। त के स्थान में म को रख देने से इस युक्ति से भी $स_म$ का मान जान सकते हो।

१६६—समीकरण में पदों के गुणकों के मान अव्यक्त-मानों के एक द्वित्र्यादि घातों के रूप में ले आने के लिये युक्ति। ऊपर के प्रक्रम में सिद्ध है कि ला $(१ + प_१र + प_२र^२ + प_३र^३ + \cdots\cdots + प_तर^त) \equiv -स_१र - \frac{१}{२}स_२र^२ - \frac{१}{३}स_३र^३ - \cdots\cdots\cdots\cdots$

इसलिये

$$१ + प_१र + प_२र^२ + प_३र^३ + \cdots\cdots + प_तर^त = इ^{-स_१र - \frac{१}{२}स_२र^२ - \frac{१}{३}स_३र^३ - \cdots\cdots\cdots}$$

जिसका विस्तृत रूप दीर्घवृत्त लक्षण से

$$\begin{array}{l|l|l|l}
१ - स_१ र - \frac{१}{२} स_२ & र^२ - \frac{१}{३} स_३ & र^३ - \frac{१}{४} स_४ & र^४ - \cdots\cdots \\
\quad + \frac{१}{२!} स_१^२ & \quad + \frac{स_१ स_२}{२!} & \quad + \frac{१}{३} स_१ स_३ & \\
 & \quad - \frac{स_१^३}{३!} & \quad - \frac{१}{४} स_१^२ स_२ & \\
 & & \quad + \frac{१}{२\cdot४} स_२^२ & \\
 & & \quad + \frac{स_१^४}{४!} &
\end{array}$$

अब दोनों पक्षों में र के समान घातों के गुणक समान करने से $प_१$, $प_२$ इत्यादि के मान $स_१$, $स_२$ इत्यादि के रूप में आजायंगे।

१६७—इस प्रक्रम में इस अध्याय में दिखाए हुए प्रकारों की व्याप्ति के लिये कुछ उदाहरण क्रिया समेत दिखलाते हैं।

उदाहरण—(१) $फा(अ_१) + फा(अ_२) + फा(अ_३) + \cdots + फा(अ_न)$ इसका मान निकालो। जहां $फ(य) = ०$ इस न घात समीकरण में अव्यक्त के मान क्रम से $अ_१, अ_२, अ_३ \cdots\cdots अ_न$ हैं।

सिद्ध है कि

$$\frac{फ'(य)}{फ(य)} = \frac{१}{य - अ_१} + \frac{१}{य - अ_२} + \frac{१}{य - अ_३} + \cdots\cdots + \frac{१}{य - अ_न}$$

और $$\frac{फ'(य) फा(य)}{फ(य)} = \frac{फा(य)}{य - अ_१} + \frac{फा(य)}{य - अ_२} + \frac{फा(य)}{य - अ_३} + \cdots\cdots + \frac{फा(य)}{य - अ_न}$$

हरों से तष्ट कर देने से

$$\frac{\text{ता}_0 \text{य}^{\text{न}-१} + \text{ता}_१ \text{य}^{\text{न}-२} + \cdots\cdots + \text{ता}_{\text{न}-१}}{\text{फ}(\text{य})} = \frac{\text{फा}(\text{अ}_१)}{\text{य}-\text{अ}_१}$$

$$+ \frac{\text{फा}(\text{अ}_२)}{\text{य}-\text{अ}_२} + \cdots\cdots + \frac{\text{फा}(\text{अ}_\text{न})}{\text{य}-\text{अ}_\text{न}}$$

छेद्गम से

$\text{ता}_0 \text{य}^{\text{न}-१} + \text{ता}_१ \text{य}^{\text{न}-२} + \cdots\cdots + \text{ता}_{\text{न}-१} =$

यौ $\text{फा}(\text{अ}_१)(\text{य}-\text{अ}_२)(\text{य}-\text{अ}_३)\cdots\cdots\cdots(\text{य}-\text{अ}_\text{न})$ $\text{य}^{\text{न}-१}$ के गुणक को दोनों पक्षों में समान करने से

$$\text{ता}_0 = \text{फा}(\text{अ}_१) + \text{फा}(\text{अ}_२) + \cdots\cdots + \text{फा}(\text{अ}_\text{न}) = \text{यौ फा}(\text{अ}_१)$$

(२) सिद्ध करो कि $\overset{\text{त}=\text{न}}{\underset{\text{त}=१}{\text{यौ}}} \frac{\text{फा}(\text{अ}_\text{त})}{\text{फ}'(\text{अ}_\text{त})} = 0$ यदि $\text{त}\overset{=\text{न}}{\underset{=१}{\text{यौ}}}$ इससे यह समझा जाय कि त के स्थान में, १,२,३,······न उत्थापन देने से जितने पद होंगे सब का योग है। और फा (य) ऊपर के उदा० में अकरणी गत अभिन्न य का फल है जिसमें य का सब से बड़ा घात $<$ न है।

यहां चलराशिकलन के १५वें प्रक्रम से

$$\frac{\text{फा}(\text{य})}{\text{फ}(\text{य})} = \frac{\text{आ}_१}{\text{य}-\text{अ}_१} + \frac{\text{आ}_२}{\text{य}-\text{अ}_२} + \cdots\cdots + \frac{\text{आ}_\text{न}}{\text{य}-\text{अ}_\text{न}}$$

$$= \frac{\text{फा}(\text{अ}_१)}{\text{फ}'(\text{अ}_१)} \frac{१}{\text{य}-\text{अ}_१} + \frac{\text{फा}(\text{अ}_२)}{\text{फ}'(\text{अ}_२)} \frac{१}{\text{य}-\text{अ}_२} + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{\text{फा}(\text{अ}_\text{न})}{\text{फ}'(\text{अ}_\text{न})} \frac{१}{\text{य}-\text{अ}_\text{न}}$$

$$\therefore \frac{\text{य फा(य)}}{\text{फ(य)}} = \text{यौ}_{\text{त}=१}^{\text{त}=\text{न}} \frac{\text{फा}(\text{अ}_\text{त})}{\text{फ}'(\text{अ}_\text{त})}\left(१ + \frac{\text{अ}_\text{त}}{\text{य}} + \frac{\text{अ}_\text{त}^२}{\text{य}^२} + \cdots\cdots\right)$$

जब फा (य) में य का सब से बड़ा घात न − २ होगा तो य से गुणने से य फा (य) इसमें सबसे बड़ा घात न − १ होगा; इसलिये $\frac{\text{य फा(य)}}{\text{फ(य)}} = \frac{\text{का}_१}{\text{य}} + \frac{\text{का}_२}{\text{य}^२} + \cdots\cdots\cdots$ इस रूप का होगा और यदि सब से बड़ा घात < न − २ तो $\frac{\text{य फा (य)}}{\text{फ(य)}}$ इसका विस्तृत रूप जो $\frac{१}{\text{य}}$ इसके घात वृद्धि में होगा उसमें $\frac{१}{\text{य}}$ इसके वर्गादि रहेंगे। व्यक्ताङ्क वा $\frac{१}{\text{य}}$ नहीं रहेंगे। ∴ दहिने पक्ष में जो व्यक्ताङ्क $\text{यौ}_{\text{त}=१}^{\text{त}=\text{न}} \frac{\text{फा}(\text{अ}_\text{त})}{\text{फ}'(\text{अ}_\text{त})}$ यह है; वह अवश्य सर्वदा शून्य के तुल्य होगा।

फा, यह अकरणी गत अभिन्न, न − २ घात से अल्प य का फल है; इसलिये फा $(\text{अ}_१) = \text{अ}_१^{\text{न}-२}, \text{अ}_१^{\text{न}-३}, \text{अ}_१^{\text{न}-४}, \ldots\ldots \text{अ}_१^०$ मानने से ऊपर की युक्ति से

$$\text{यौ} \frac{\text{अ}_१^{\text{न}-२}}{\text{फ}'(\text{अ}_१)} = ०, \ \text{यौ} \frac{\text{अ}_१^{\text{न}-३}}{\text{फ}'(\text{अ}_१)} = ०\ldots\ldots, \ \text{यौ} \frac{\text{अ}_१}{\text{फ}'(\text{अ}_१)} = ०,$$

$$\text{यौ} \frac{१}{\text{फ}'(\text{अ}_१)} = ० \text{ ।}$$

(३) जिन वर्णों के घातों के गुणनफल में घात संख्याओं का योग स्थिर रहता है ऐसे गुणनफल को ध्रुवशक्तिक कहते हैं। और इनसे बने हुए समीकरण को ध्रुवशक्तिक समीकरण

कहते हैं। जैसे, $य^४$, $य^३र$, $य^२र^२$, $यर^३$, $र^४$ इन सब को दो वर्णों का ध्रुवशक्तिक गुणनफल कहते हैं। और $य^४+य^३र+य^२र^२+यर^३+र^४+क=०$ इसे दो वर्णों का ध्रुवशक्तिक समीकरण कहते हैं जहां ध्रुवशक्ति का प्रमाण ४ है।

फ(य) = ० इसमें जितने अव्यक्तमान हैं उनके ध्रुवशक्तिक गुणनफलों के योग $श_त$ को बताओ जहां त ध्रुवशक्ति का प्रमाण है अर्थात् घात संख्याओं का योग है। मान लो कि $अ_१$, $अ_२ \cdots\cdots अ_न$ अव्यक्तमान हैं तो $र = \frac{१}{य}$ मानने से

$$\frac{य^न}{फ(य)} = \frac{१}{(१-अ_१र)(१-अ_२र)\cdots\cdots(१-अ_नर)}$$

$$=(१+अ_१र+अ_१^२र^२+\cdots\cdot)(१+अ_२र+अ_२^२र^२+\cdots\cdot)$$
$$\cdots\cdots(१+अ_नर+अ_न^२र^२+\cdots\cdots)$$

$$=१+श_१र+श_२र^२+श_३र^३+\cdots\cdots+श_तर^त+\cdots\cdots\cdots$$

और $\frac{य^{न-१}}{फ(य)} = यौ \frac{अ_१^{न-१}}{फ'(अ_१)} \cdot \frac{१}{य-अ_१}$ (२) उदाहरण से;

इसलिये $$\frac{य^न}{फ(य)} = यौ \frac{अ_१^{न-१}}{फ'(अ_१)} \cdot \frac{य}{य-अ_१}$$

$$= यौ \frac{अ_१^{न-१}}{फ'(अ_१)} \cdot \frac{१}{१-अ_१र}$$

$$= यौ \frac{अ_१^{न-१}}{फ'(अ_१)} (१+अ_१र+अ_१^२र^२+\cdots\cdots\cdots$$
$$+अ_१^तर^त+\cdots\cdots)$$

$$= यौ \frac{अ_१^{न+त-१}}{फ'(अ_१)} र^त$$

दोनों सरूप समीकरणों में $र^{त}$ का गुणक समान करने से

$$श_{त} = यौ \frac{अ_{१}^{न+त-१}}{फ'(अ_{१})}।$$

(४) मानों के ध्रुवशक्तिक गुणनफल के रूप में समीकरण के पदों का गुणक बतावो। और इसका विपरीत गुणकों के रूप में मानों के ध्रुवशक्तिक गुणनफलों को बतावो। पिछले उदाहरण से

$$(१-अ_{१}र)(१-अ_{२}र)\cdots\cdots(१-अ_{न}र) = १ + प_{१}र + प_{२}र^{२} + \cdots\cdots प_{न}र^{न}$$

और
$$\frac{१}{(१-अ_{१}र)(१-अ_{२}र)} = १ + श_{१}र + श_{२}र^{२} + \cdots\cdots$$

$$\therefore १ = (१ + प_{१}र + प_{२}र^{२} + \cdots\cdots + प_{न}र^{न})(१ + श_{१}र + श_{२}र^{२} + \cdots\cdots)$$

गुणन करने से सरूप समीकरण की युक्ति से

$$प_{१} + श_{१} = ०$$

$$प_{२} + श_{२} + प_{१}श_{१} = ०$$

$$प_{३} + श_{३} + प_{१}श_{२} + प_{२}श_{१} = ० \quad इत्यादि$$

इनसे $श_{१}$, $श_{२}$ इत्यादि के रूप में $प_{१}$, $प_{२}$, इत्यादि और $प_{१}$, $प_{२}$, इत्यादि के रूप में $श_{१}$, $श_{२}$ इत्यादि आवेंगे। इनमें यदि $त < न$ तो $प_{१}, प_{२}\cdots\cdots$ और $श_{१}, श_{२}$ इत्यादि को परस्पर बदल देने से भी समीकरण ज्यों के त्यों बने रहेंगे। इससे और पिछले उदाहरण से समीकरण के पदों के गुणकों के रूप में

यौ $\frac{अ_1^{न-1}}{फ'(अ_1)}$, यौ $\frac{अ_1^{न}}{फ'(अ_1)}$, यौ $\frac{अ_1^{न+1}}{फ'(अ_1)}$,........इन तद्रूपफलों के मान निकल आवेंगे।

(५) $श_त$ को अव्यक्तमानों के वर्गादिकों के योग के रूप में ले आवो।

यदि $(१ - अ_1 र)(१ - अ_2 र) \cdots\cdots (१ - अ_न र) = \frac{१}{स}$

दोनों का लघुरिक्थ लेने से

$ला\,(१ - अ_1 र) + ला\,(१ - अ_2 र) + \cdots\cdots + ला\,(१ - अ_न र) = ला\,स$

चलनकलन से र के वश से तात्कालिक संबन्ध निकालने से

$$\frac{अ_1}{१ - अ_1 र} + \frac{अ_2}{१ - अ_2 र} + \cdots\cdots = यौ\ \frac{अ_1}{१ - अ_1 र} = स_1 + स_2 र$$

$$+ स_3 र^2 + \cdots\cdots = \frac{१}{स}\frac{ता\,स}{ता\,र}$$

और पिछले उदाहरण से $स = १ + श_1 र + श_2 र^2 + \cdots\cdots$

इसलिये $\frac{ता\,स}{ता\,र} = श_1 + २श_2 र + ३श_3 र^2 + \cdots\cdots\cdots$ इनके उत्थापन से $(स_1 + स_2 र + स_3 र^2 + \ldots)(१ + श_1 र + श_2 र^2 + \cdots)$ $= श_1 + २श_2 र + ३श_3 र^2 + \cdots\cdots\cdots$ अब र के समान घातों के गुणकों को सम करने से $स_1, स_2 \ldots\ldots$ के रूप में $श_1, श_2 \ldots\ldots$ आ जायंगे। इस प्रकार अनेक चमत्कार उत्पन्न होते हैं।

१६८—इस प्रक्रम में कुछ और सहज युक्तिआं उदाहरण करने के लिये दिखलाते हैं।

उदाहरण—(१) $फ(य) = ० = य^{न} + प_{१}य^{न-१} + \ldots\ldots$ $+ प_{न}$ इसमें जो अव्यक्त के मान $अ_{१}, अ_{२}, अ_{३} \ldots\ldots अ_{न}$ माने जायं तो $यौ\, अ^{२}_{१}अ_{२}अ_{३}$ इसका मान निकालो।

$$यहां\; यौ\, अ_{१} = -प_{१}$$

$$यौ\, अ_{१}अ_{२}अ_{३} = -प_{३}$$

इनके गुणनफल में $अ^{२}_{१}अ_{२}अ_{३}$ यह तो एक बेर आवेगा। $अ_{१}अ_{२}अ_{३}अ_{४}$ यह चार बार आवेगा। एक बार $अ_{१}, अ_{२}अ_{३}अ_{४}$, दूसरे बार $अ_{२}, अ_{१}अ_{३}अ_{४}$, तीसरे बार $अ_{३}, अ_{१}अ_{२}अ_{४}$, और चौथे बार $अ_{४}, अ_{१}अ_{२}अ_{३}$, से इसलिये $यौअ^{२}_{१}अ_{२}अ_{३} + ४यौअ_{१}अ_{२}अ_{३}अ_{४}$ $= प_{१}प_{३}$

$\therefore$ $यौ\, अ^{२}_{१}अ_{२}अ_{३} = प_{१}प_{३} - ४यौ\, अ_{१}अ_{२}अ_{३}अ_{४} = प_{१}प_{३}$ $+ ४यौ\, अ_{१}अ_{२}अ_{३}अ_{४} = प_{१}प_{३} - ४प_{४}$। १६३वें प्रक्रम में $म = २$, $प = ब = १$ मानने से

$$२यौ\, अ^{२}_{१}अ_{२}अ_{३} = स_{२}स^{२}_{१} - २स_{१}स_{३} - स^{२}_{२} + २स_{४}$$

इसमें $स_{१}, स_{२}$ इत्यादि के मान समीकरण के पदों के गुणकों के रूप में ले आने से ऊपर ही का मान बड़े परिश्रम से निकलेगा जो ऊपर की युक्ति से बड़े लाघव से आया है।

(२) $यौ\, अ^{२}_{१}अ^{२}_{२}$ इसका मान निकालो।

$$यहां\; यौ\, अ_{१}अ_{२} = प_{२}$$

वर्ग करने से

$यौ\, अ^{२}_{१}अ^{२}_{२} + २यौ\, अ^{२}_{१}अ_{२}अ_{३} + ६यौ\, अ_{१}अ_{२}अ_{३}अ_{४} = प^{२}_{२}$ वर्ग करने में $अ_{१}अ_{२}अ_{३}अ_{४}$ यह पद $अ_{१}अ_{२}, अ_{३}अ_{४}$। $अ_{१}अ_{३}, अ_{२}अ_{४}$। और $अ_{१}अ_{४}, अ_{२}अ_{३}$ इनके गुणन से उत्पन्न होगा। इसलिये वर्ग करने में दो बार आने से $अ_{१}अ_{२}अ_{३}अ_{४}$ यह छः बार आवेगा। इसलिये

$\text{यौ}(\text{अ}_{\text{१}}\text{अ}_{\text{२}})^{\text{२}} = \text{प}^{\text{२}}_{\text{२}} - \text{२यौ}\,\text{अ}^{\text{२}}_{\text{१}}\text{अ}_{\text{२}}\text{अ}_{\text{३}} - \text{६यौ}\,\text{अ}_{\text{१}}\text{अ}_{\text{२}}\text{अ}_{\text{३}}\text{अ}_{\text{४}}$

$= \text{प}^{\text{२}}_{\text{२}} - \text{२प}_{\text{१}}\text{प}_{\text{३}} + \text{८प}_{\text{४}} - \text{६प}_{\text{४}}$

$= \text{प}^{\text{२}}_{\text{२}} - \text{२प}_{\text{१}}\text{प}_{\text{३}} + \text{२प}_{\text{४}}$ ।

(३) $\text{यौ}\,\text{अ}^{\text{३}}_{\text{१}}\text{अ}_{\text{२}}$ इसका मान निकालो।

यहां $\text{यौ}\,\text{अ}^{\text{२}}_{\text{१}}\;\text{यौ}\,\text{अ}_{\text{१}}\text{अ}_{\text{२}} = \text{यौ}\,\text{अ}^{\text{३}}_{\text{१}}\text{अ}_{\text{२}} + \text{यौ}\,\text{अ}^{\text{२}}_{\text{१}}\text{अ}_{\text{२}}\text{अ}_{\text{३}}$ पिछले मानों का उत्थापन देने से

$\text{यौ}\,\text{अ}^{\text{३}}_{\text{१}}\text{अ}_{\text{२}} = \text{प}^{\text{२}}_{\text{१}}\text{प}_{\text{२}} - \text{२प}^{\text{२}}_{\text{२}} - \text{प}_{\text{१}}\text{प}_{\text{३}} + \text{४प}_{\text{४}}$

(४) $\text{यौ}\,\text{अ}^{\text{२}}_{\text{१}}\text{अ}^{\text{२}}_{\text{२}}\text{अ}_{\text{३}}$ इसके मान के लिये $\text{यौ}\,\text{अ}_{\text{१}}\text{अ}_{\text{२}}$

$\text{यौ}\,\text{अ}_{\text{१}}\text{अ}_{\text{२}}\text{अ}_{\text{३}}$

$= \text{यौ}\,\text{अ}^{\text{२}}_{\text{१}}\text{अ}_{\text{२}}\text{अ}_{\text{३}}\text{अ}_{\text{४}} + \text{३यौ}\,\text{अ}^{\text{२}}_{\text{१}}\text{अ}_{\text{२}}\text{अ}_{\text{३}}\text{अ}_{\text{४}}$

$+ \text{१०यौ}\,\text{अ}_{\text{१}}\text{अ}_{\text{२}}\text{अ}_{\text{३}}\text{अ}_{\text{४}}$ और

$\text{यौ}\,\text{अ}^{\text{२}}_{\text{१}}\text{अ}_{\text{२}}\text{अ}_{\text{३}}\text{अ}_{\text{४}}$ इसके मान के लिये

$\text{यौ}\,\text{अ}_{\text{१}}\text{अयौ}\text{अ}_{\text{१}}\text{अ}_{\text{२}}\text{अ}_{\text{३}}\text{अ}_{\text{४}} = \text{यौ}\text{अ}^{\text{२}}_{\text{१}}\text{अ}_{\text{२}}\text{अ}_{\text{३}}\text{अ}_{\text{४}} + \text{५यौ}\text{अ}_{\text{१}}\text{अ}_{\text{२}}\text{अ}_{\text{३}}\text{अ}_{\text{४}}\text{अ}_{\text{५}}$

इस पर से और दो पिछले मानों से

$\text{यौ}\,\text{अ}^{\text{२}}_{\text{१}}\text{अ}^{\text{२}}_{\text{२}}\text{अ}_{\text{३}} = -\text{प}_{\text{२}}\text{प}_{\text{३}} + \text{३प}_{\text{१}}\text{प}_{\text{४}} - \text{५प}_{\text{५}}$

यही १६३वें प्रक्रम के दूसरे समीकरण से भी बड़े प्रयास से आवेगा जहां म = २ और प = १ है।

(५) $\text{यौ}\,\text{अ}^{\text{२}}_{\text{१}}\text{अ}^{\text{२}}_{\text{२}}\text{अ}_{\text{३}}\text{अ}_{\text{४}}$ इसके मान के लिये $\text{यौ}\,\text{अ}_{\text{१}}\text{अ}_{\text{२}}$ और $\text{यौ}\,\text{अ}_{\text{१}}\text{अ}_{\text{२}}\;\text{यौ}\,\text{अ}_{\text{१}}\text{अ}_{\text{२}}\text{अ}_{\text{३}}\text{अ}_{\text{४}}$ इनका गुणनफल निकालना चाहिए।

$\text{यौ}\text{अ}_{\text{१}}\text{अ}_{\text{२}}\text{यौ}\text{अ}_{\text{१}}\text{अ}_{\text{२}}\text{अ}_{\text{३}}\text{अ}_{\text{४}} = \text{यौ}\text{अ}^{\text{२}}_{\text{१}}\text{अ}^{\text{२}}_{\text{२}}\text{अ}_{\text{३}}\text{अ}_{\text{४}} + \text{४यौ}\text{अ}^{\text{२}}_{\text{१}}\text{अ}_{\text{२}}\text{अ}_{\text{३}}\text{अ}_{\text{४}}\text{अ}_{\text{५}}$
$+ \text{१५यौ}\,\text{अ}_{\text{१}}\text{अ}_{\text{२}}\text{अ}_{\text{३}}\text{अ}_{\text{४}}\text{अ}_{\text{५}}$ और $\text{यौ}\,\text{अ}^{\text{२}}_{\text{१}}\text{अ}_{\text{२}}\text{अ}_{\text{३}}\text{अ}_{\text{४}}\text{अ}_{\text{५}}$ इसके लिये

$\text{यौ}\,\text{अ}_{\text{१}}\;\text{यौ}\,\text{अ}_{\text{१}}\text{अ}_{\text{२}}\text{अ}_{\text{३}}\text{अ}_{\text{४}}\text{अ}_{\text{५}} = \text{यौ}\,\text{अ}^{\text{२}}_{\text{१}}\text{अ}_{\text{२}}\text{अ}_{\text{३}}\text{अ}_{\text{४}}\text{अ}_{\text{५}}$

$+ \text{६यौ}\,\text{अ}_{\text{१}}\text{अ}_{\text{२}}\text{अ}_{\text{३}}\text{अ}_{\text{४}}\text{अ}_{\text{५}}\text{अ}_{\text{६}}$

इनके उत्थापन से

$\text{यौ}\,\text{अ}_1^2\text{अ}_2^2\text{अ}_3\text{अ}_4 = \text{प}_2\text{प}_4 - ४\text{प}_1\text{प}_5 + ९\text{प}_6$

(६) $\text{यौ}\,\text{अ}_1^2\text{अ}_2^2\text{अ}_3^2$ इसका मान निकालो।

यहां $\text{यौ}\,\text{अ}_1\text{अ}_2\text{अ}_3$ इसके वर्ग से

$\text{यौ}\,\text{अ}_1\text{अ}_2\text{अ}_3\;\text{यौ}\,\text{अ}_1\text{अ}_2\text{अ}_3$

$$= \text{यौ}\,\text{अ}_1^2\text{अ}_2^2\text{अ}_3^2 + २\text{यौ}\,\text{अ}_1^2\text{अ}_2^2\text{अ}_3\text{अ}_4 + ६\text{यौ}\,\text{अ}_1^2\text{अ}_2\text{अ}_3\text{अ}_4\text{अ}_5 + २०\text{यौ}\,\text{अ}_1\text{अ}_2\text{अ}_3\text{अ}_4\text{अ}_5\text{अ}_6$$

इस पर से

$\text{यौ}\,\text{अ}_1^2\text{अ}_2^2\text{अ}_3^2 = \text{प}_3^2 - २\text{प}_2\text{प}_4 + २\text{प}_1\text{प}_5 - २\text{प}_6$ ।

इस तरह लाघव से सैकड़ों उदाहरणों का उत्तर निकल सकता है।

१६६—ऊपर के उदाहरणों से स्पष्ट है कि जिस तद्रूप-फलों में जो ध्रुवशक्ति है उसी के तुल्य, उत्तर के प्रत्येक पदों में समीकरण के गुणक संख्याओं का योग होता है और तद्रूप-फल में जो सब से बड़ी घात संख्या है उससे अल्प वा उसी के तुल्य उत्तर के प्रत्येक पद में समीकरण के गुणकों के घात संख्या का योग होता है। जैसे—$\text{यौ}\,\text{अ}_1^3\text{अ}_2 = ४\text{प}_4 - \text{प}_1\text{प}_3 + \text{प}_1^2\text{प}_2 - २\text{प}_2^2$, इसमें $\text{यौ}\,\text{अ}_1^3\text{अ}_2$ ध्रुवशक्ति ३ + १ = ४ है और सब से बड़ा घात ३ है (इस बड़े घात को सोपान कहो) तो उत्तर में, पहले पद में प_4 है इसमें गुणक संख्या ४, ध्रुवशक्ति के तुल्य है, दूसरे पद में भी ३ + १ = ४ गुणक संख्याओं का योग ध्रुवशक्ति ही के तुल्य है। तीसरे पद में भी $\text{प}_1^2\text{प}_2 = \text{प}_1\text{प}_1\text{प}_2$ गुणकों के संख्या का योग ध्रुवशक्ति ही के तुल्य है

इसी प्रकार चौथे पद $प_४ = प^१_४$ में घात संख्या एक सोपान से अल्प, दूसरे पद $प_१ प_३ = प^१_१ प^१_३$ में भी घात संख्याओं का योग $१ + १ = २$ सोपान से अल्प, तीसरे पद $प^२_१ प_२ = प^२_१ प^१_२$ में घात संख्याओं का योग $२ + १ = ३$ सोपान के तुल्य और चौथे पद में भी घात संख्या २ यह सोपान से अल्प ही है। यही रीति सब में पाई जाती है; इसलिये ऊपर जो अनुगम लिखा है वह सत्य है।

उदाहरण—(१) $यौ\, अ^२_१ अ^२_२ अ^२_३ अ^२_४$ इसका मान बताओ।

यहां ध्रुव शक्ति $= २ + २ + २ + २ = ८$ और सोपान २ है इसलिये ऊपर के अनुगम से

$$यौ\, अ^२_१ अ^२_२ अ^२_३ अ^२_४ = ट_० प_८ + ट_१ प_१ प_७ + ट_२ प_२ प_६ + ट_३ प_३ प_५ + ट_४ प^२_४ ।$$

जहां $ट_०, ट_१$ इत्यादि व्यक्त गुणक हैं। यहां $प_१ प_१ प_६ = प^२_१ प_६$, $प_१ प_२ प_५$, $प_१ प_१ प_१ प_५ = प^३_१ प_५$ इत्यादि पद न आवेंगे क्योंकि इनमें गुणकों के संख्याओं का योग तो ध्रुवशक्ति के समान है परन्तु घात संख्याओं का योग सोपान से बड़ा हो जाता है; इसलिये दोनों धर्म के न रहने से वे पद नहीं लिए गए, इसी प्रकार $प^३_१, प^३_२, प^३_३$ इत्यादि पद भी केवल सोपान सम्बन्धी एक ही धर्म के रहने से नहीं लिए गए।

१७०—१६६वें प्रक्रम से

$$ला\,(१ + प_१ र + प_२ र^२ + \cdots\cdots + प_न र^न) =$$

$$स_१ र - \tfrac{१}{२} स_२ र^२ - \tfrac{१}{३} स_३ र^३ \cdots\cdots - \frac{१}{त} स_त र^त \cdots\cdots\cdots$$

चलनकलन से $स_त$ के वश से तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$\frac{ता}{तास_त}\left(१+प_१र+प_२र^२+\cdots\cdots\cdots+प_नर^न\right)=$$

$$-\left(१+प_१र+प_२र^२+\cdots\cdots+प_नर^न\right)\frac{र^त}{त},$$

र के भिन्न भिन्न घातों के गुणकों की तुलना करने से

$$\frac{ता\, प_ब}{ता\, स_त}=० \text{ यदि } ब<त,$$

$$\frac{ताप_त}{तास_त}=-\frac{१}{त},\ \frac{ता\, प_{त+ज}}{ता\, स_त}=-\frac{१}{त}प_ज$$

इस चलनसमीकरण को ब्रीओशी (Brioschi) ने निकाला है। इस पर से समीकरण के पदों के गुणकों के कोई फल का तात्कालिक सम्बन्ध $स_त$ के वश से निकाल सकते हैं क्योंकि यदि गुणकों का फल $=फी\,(प_१, प_२, प_३\ldots\ldots प_न)$ हो तो ऊपर के समीकरण से

$\frac{ता\, प_१}{ता\, स_त}\cdot\frac{ता\, प_२}{ता\, स_त}\cdots\cdots\cdots\frac{ता\, प_{त-१}}{ता\, स_त}$ ये सब शून्य के तुल्य होंगे; इसलिये

$$\frac{ता}{ता\, स_त}फी(प_१,प_२,प_३\cdots\cdots प_न)=$$

$$\frac{ता\, फी}{ता\, प_त}\cdot\frac{ता\, प_त}{ता\, स_त}+\frac{ता\, फी}{ता\, प_{त+१}}\cdot\frac{ता\, प_{त+१}}{ता\, स_त}+\cdots\cdots+\frac{ता\, फी}{ता\, प_न}\cdot\frac{ता\, प_न}{ता\, स_त}$$

ऊपर के चलनसमीकरण से $\frac{ता\, प_त}{ता\, स_त}$, $\frac{ता\, प_{त+१}}{ता\, स_त}$ इत्यादि के मानों का उत्थापन देने से

$$\frac{\text{ता}}{\text{ता स}_\text{त}}\text{फी}(\text{प}_1,\text{प}_2,\cdots\cdots\text{प}_\text{न}) =$$

$$-\frac{1}{\text{त}}\left(\frac{\text{ता फी}}{\text{ता प}_\text{त}}+\text{प}_1\frac{\text{ता फी}}{\text{ता प}_{\text{त}+1}}+\text{प}_2\frac{\text{ता फी}}{\text{ता प}_{\text{त}+2}}+\cdots+\text{प}_{\text{न}-\text{त}}\frac{\text{ता फी}}{\text{ता प}_\text{न}}\right)$$

इसके बल से प्रायः तद्रूपफल के मान बड़ी सुगमता से आ जाते हैं; जैसे १६६वें प्रक्रम में जो यौ $\text{अ}^2_1\text{अ}^2_2\text{अ}^2_3\text{अ}^2_4 = \text{ट}_0\text{प}_8+\text{ट}_1\text{प}_7\text{प}_1+\text{ट}_2\text{प}_6\text{प}_2+\text{ट}_3\text{प}_5\text{प}_3+\text{ट}_4\text{प}^2_4$ यह समीकरण दिखाया है जहां अनुगम से सिद्ध किया है कि $\text{ट}_0, \text{ट}_1$, इत्यादि स्थिर व्यक्ताङ्क हैं तहां यदि इन स्थिराङ्कों के मान जानना हो तो चतुर्घात समीकरण से यह तो स्पष्ट हो है कि

$\text{अ}^2_1\text{अ}^2_2\text{अ}^2_3\text{अ}^2_4 = \text{प}^2_4$ इसलिये $\text{ट}_4 = 1$।

औरों के मान जानने के लिये १६३वें प्रक्रम के (१) समीकरण से स्पष्ट है कि यौ $\text{अ}^2_1\text{अ}^2_2\text{अ}^2_3\text{अ}^2_4$ इसके मान में स_2, $\text{स}_4, \text{स}_6, \text{स}_8$ ये ही आवेंगे; इसलिये $\frac{\text{ता फी}}{\text{ता स}_3} = 0$ और $\frac{\text{ता फी}}{\text{ता स}_7} = 0$, इनका मान, $\frac{\text{ता फी}}{\text{ता स}_\text{त}}$ इसके जानने के लिये जो ऊपर समीकरण लिख आए हैं उसमें त = ३ और त = ७ मानने से

$$\text{ट}_0\text{प}_5+\text{ट}_1\text{प}_1\text{प}_4+\text{ट}_2\text{प}_3\text{प}_2+\text{ट}_3(\text{प}_2\text{प}_3+\text{प}_5)+2\text{ट}_4\text{प}_1\text{प}_4$$

$$=\text{प}_5(\text{ट}_0+\text{ट}_3)+\text{प}_1\text{प}_4(\text{ट}_1+2\text{ट}_4)+\text{प}_3\text{प}_2(\text{ट}_2+\text{ट}_3)=0$$

$$\text{और } \text{ट}_0\text{प}_1+\text{ट}_1\text{प}_1=0 \quad =\text{प}_1(\text{ट}_0+\text{ट}_1)$$

ये समीकरण $\text{प}_1, \text{प}_2$ इत्यादि के भिन्न भिन्न मानों में सर्वदा सत्य हैं; इसलिये

$ट_0 + ट_1 = ०$, $ट_0 + ट_3 = ०$, $ट_1 + २ट_4 = ट_1 + २ = ०$, $ट_2 + ट_3 = ०$ इन परसे $ट_1 = -२$, $ट_0 = २$, $ट_3 = -२$, $ट_2 = २$, $ट_4$ का तो मान पहिले ही १ सिद्ध कर आए हैं। इनके उत्थापन से यौ $अ^2_1 अ^2_2 अ^2_3 अ^2_4 = २प_8 - २प_0प_1 + २प_6प_2 - २प_5प_3 + प^2_4$

(२) यौ $अ^3_1 अ^2_2 अ_3$ इसका मान जानना है।

यहां ध्रुवशक्ति $= ३ + २ + १ = ६$ और सोपान ३ है; इसलिये १६६वें प्रक्रम से

यौ $अ^3_1 अ^2_2 अ_3 = ट_0प_6 + ट_1प_5प_1 + ट_2प_4प_2 + ट_3प_4प^2_1 + ट_4प^2_3 + ट_5प_1प_2प_3 + ट_6प^3_2$ और १६३वें प्रक्रम से

यौ $अ^3_1 अ^2_2 अ_3 = स_1स_2स_3 - स_1स_5 - स^2_3 - स_2स_4 + २स_6$

ब्रीओशी के समीकरण से $स_6$ के वश से तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$ट_0 \frac{ताप_6}{तास_6} = -\frac{ट_0}{६} = २ \quad \therefore ट_0 = -१२।$$

$स_5$ के वश तात्कालिक सबम्न्ध निकालने से

$$ट_0प_1 + ट_1प_1 = ५स_1 = -५प_1 \quad \therefore ट_1 = ७।$$

$स_4$ के वश तात्कालिक सम्बन्ध से

$$ट_0प_2 + ट_1प^2_1 + ट_2प_2 + ट_3प^2_1 = ४स_2 = ४(प^2_1 - २प_2)$$

$प_2$ और $प^2_1$ के गुणकों को दोनों पक्षों में समान करने से

$$ट_0 + ट_2 = -८,\ ट_1 + ट_3 = ४।$$

$$\therefore ट_3 = -३; \quad ट_2 = ४।$$

और $ट_6 = ०$ होगा क्योंकि यदि न − २ इतने मान समीकरण में शून्य हों तो यौ $अ^3_1 अ^2_2 अ_3 = ०$। और यदि न − ३

इतने मान समीकरण में शून्य हों तो यौ $अ^3_1 अ^2_2 अ_3 =$ $अ_1 अ_2 अ_3 अ_4$ यौ $अ^2_1 अ_2 - प_3(-प_1 प_2 + ३प_3) = प_1 प_2 प_3 - ३प^2_3$

$$\therefore\ ट_4 = -३,\ ट_5 = १$$

इनके उत्थापन से

$$यौ\ अ^3_1 अ^2_2 अ_3 = -१२प_6 + ७प_1 प_5 + ४प_2 प_4 - ३प_4 प^2_1 - ३प^2_3 + प_1 प_2 प_3$$

इस प्रकार अनेक उदाहरणों के उत्तर सहज में निकल सकते हैं।

१७१—$फ(य) = ०$ इसमें जो अव्यक्त मान हैं उनमें से दो दो के अन्तर को वर्ग के समान जिस समीकरण में अव्यक्त-मान होंगे उस समीकरण को बनाना है।

कल्पना करो कि दिया हुआ समीकरण न घात का है और उसमें अव्यक्त के मान क्रम से

$अ_1, अ_2, अ_3 \cdots\cdots अ_न$ हैं। तो साध्य समीकरण में अव्यक्त-मान जो $(अ_1 - अ_2)^2, (अ_1 - अ_3)^2, \cdots\cdots (अ_2 - अ_3)^2 \cdots\cdots$ ये होंगे, उनकी संख्या एक द्वित्र्यादि भेद की युक्ति से $\frac{न(न-१)}{२}$ इतनी होगी; इसलिये साध्य समीकरण $\frac{न(न-१)}{२} = म$ घात का होगा। मान लो कि साध्य समीकरण

$य^म + बय^{म-१} + बय^{म-२} + \cdots\cdots + ब_म = ०$ ऐसा है और इसमें अव्यक्त मानों के त घात का योग $सा_त$ है तो यदि इसमें $सा_1, सा_2, \cdots\cdots, सा_म$ के मान यदि व्यक्त हो जायं तो

१६०वें प्रक्रम से $सा_१ + ब_१ = ०$, $सा_२ + ब_१ सा_१ + २ब_२ = ०$ इत्यादि समीकरणों की सहायता से $ब_१$, $ब_२$ इत्यादि के मान व्यक्त हो जायँगे।

कल्पना करो कि

$$फी(य) = (य - अ_१)^{२त} + (य - अ_२)^{२त} + (य - अ_३)^{२त} + \cdots$$

तो य के स्थान में $अ_१$, $अ_२$, इत्यादि के उत्थापन से और उनके योग से

$$२सा_त = फी(अ_१) + फी(अ_२) + फी(अ_३) + \cdots\cdots\cdots ।$$

दिए हुए समीकरण में अव्यक्त मानों के एक द्वित्र्यादि घातों के योग को पूर्ववत् $स_१, स_२, \cdots\cdots\cdots स_त$ मानो तो ऊपर फी (य) के मान को द्वियुक्पद सिद्धान्त से फैला कर योग करने से

$$फी(य) = नय^{२त} - २तस_१ य^{२त-१} + \frac{२त(२त-१)}{१ \cdot २} स_२ ग^{२त-२}$$

$$- \cdots\cdots\cdots + स_{२त}$$

य के स्थान में क्रम से $अ_१$, $अ_२$, इत्यादि के उत्थापन और योग से

$$२सा_त = नस_{२त} - २तस_१ स_{२त-१} + \frac{२त(२त-१)}{१ \cdot २} स_२ स_{२त-२} - \cdots$$

$\cdots + नस_{२त}$ इसके दहिने पक्ष में आदि पद से आगे अन्तिम पद से पीछे तुल्यान्तर में पद समान हैं; इसलिये इनको इकट्ठा करने से और २ के भाग दे देने से

$$सा_त = नस_{२त} - २तस_१ स_{२त-१} + \frac{२त(२त-१)}{१\cdot२} स_२ स_{२त-२} - \cdots$$
$$\cdots + \frac{१}{२}(-१)^त \frac{२त(२त-१)\cdots(त+१)}{त!} स_त^२$$

$स_१$, $स_२$, इत्यादि दिए हुए समीकरण के पदों के गुणकों के रूप में पिछले प्रक्रमों से आजायँगे और इनसे ऊपर के समीकरण की सहायता से $सा_त$ का मान भी आवेगा जिससे साध्य समीकरण के पदों के गुणक भी त के स्थान में १,२, इत्यादि के उत्थापन से व्यक्त हो जायंगे।

१७२—ऊपर के साध्य समीकरण में अन्तिम पद $व_म$ का मान इस प्रकार से भी जान सकते हो।

दिए हुए न घात समीकरण को मान लो कि $फ(य) = ०$ है तो

$$फ(य) = (य - अ_१)(य - अ_२)(य - अ_३)\cdots\cdots$$
$$फ'(य) = (य - अ_२)(य - अ_३)\cdots + (य - अ_१)(य - अ_३)\cdots + \cdots$$

$अ_१$, $अ_२$, इत्यादि के उत्थापन से

$$फ'(अ_१) = (अ_१ - अ_२)(अ_१ - अ_३)\cdots\cdots$$
$$फ'(अ_२) = (अ_२ - अ_१)(अ_२ - अ_३)\cdots\cdots$$

इसलिये $व_म = फ'(अ_१)\, फ'(अ_२)\, फ'(अ_३)\cdots\cdots$

अब कल्पना करो कि $फ'(य) = ०$ इसमें अव्यक्त मान क्रम से $आ_१$, $आ_२$, $आ_३$, इत्यादि हैं तो

$$फ'(य) = न(य - आ_१)(य - आ_२)(य - आ_३)\cdots\cdots$$

इसलिये $फ'(अ_१)\, फ'(अ_२)\, फ'(अ_३) =$

$$न^२(अ_१ - आ_१)(अ_१ - आ_२)(अ_१ - आ_३)\cdots\cdots$$
$$(अ_२ - आ_१)(अ_२ - आ_२)$$

परन्तु $(\text{अ}_1 - \text{आ}_1)(\text{अ}_2 - \text{आ}_1)(\text{अ}_3 - \text{आ}_1)\cdots\cdots$

$$= (-१)^{\text{न}} \text{फ}(\text{आ}_1)$$

$(\text{अ}_1 - \text{आ}_2)(\text{अ}_2 - \text{आ}_2)(\text{अ}_3 - \text{आ}_2)\cdots\cdots = (-१)^{\text{न}} \text{फ}(\text{आ}_2)$

इसी प्रकार से आगे भी जानना तो

$\text{फ}'(\text{अ}_1)\, \text{फ}'(\text{अ}_2)\, \text{फ}'(\text{अ}_3)\cdots\cdots\cdots$

$$= \text{न}^2 (-१)^{\text{न}(\text{न}-१)} \text{फ}(\text{आ}_1)\, \text{फ}(\text{आ}_2)\, \text{फा}(\text{आ}_3)\cdots\cdots$$
$$= \text{न}^2\, \text{फ}(\text{आ}_1)\, \text{फ}(\text{आ}_2)\, \text{फा}(\text{आ}_3)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

क्योंकि न चाहे विषम वा सम हो $\text{न}(\text{न}-१) = \text{न}^2 - \text{न}$ यह सर्वदा सम ही रहेगा ।

१७३—मानों के अन्तर-वर्ग-मान जिसमें है उस समीकरण में यदि सब अव्यक्त मान धन हो तो स्पष्ट है कि दिए हुए समीकरण में असंभव मान न होंगे । और यदि उसमें ऋण मान हो तो दिए हुए समीकरण में अवश्य असंभव मान होंगे । और यदि उस नये समीकरण में असंभव मान हों तो दिए हुए समीकरण में भी असंभव मान होंगे ।

१७४—$\text{प}_0 \text{य}^{\text{म}} + \text{प}_1 \text{य}^{\text{म}-१} + \text{प}_2 \text{य}^{\text{म}-२} + \cdots\cdots + \text{प}_{\text{म}} = 0$

$$\text{ब}_0 \text{य}^{\text{न}} + \text{ब}_1 \text{य}^{\text{न}-१} + \text{ब}_2 \text{य}^{\text{न}-२} + \cdots\cdots + \text{ब}_{\text{न}} = 0$$

इन समीकरणों में चाहते हैं कि य न रहे । जहां $\text{प}_0, \text{प}_1, \text{प}_2 \cdots\cdots \text{ब}_0, \text{ब}_1, \text{ब}_2 \cdots\cdots$ अकरणीगत अभिन्न र के फल हैं । मान लो कि पहिले समीकरण से य के मान र के रूप में किसी युक्ति से अ,क,ख,⋯⋯आ गए तो दूसरे समीकरण में य के स्थान में अ,क,ख,⋯⋯के उत्थापन से

$$\text{ब}_0 \text{अ}^{\text{न}} + \text{ब}_1 \text{अ}^{\text{न}-१} + \text{ब}_2 \text{अ}^{\text{न}-२} + \cdots\cdots + \text{ब}_{\text{न}} = 0$$

$$ब_०क^न + ब_१क^{न-१} + ब_२क^{न-२} + \cdots\cdots + ब_न = ०$$

$$ब_०ख^न + ब_१ख^{न-१} + ब_२ख^{न-२} + \cdots\cdots + ब_न = ०$$

....

इन समीकरणों में जो अव्यक्त के मान हैं सब र के अव्यक्तमान होंगे। मान लो कि इन सभी समीकरणों में से पहिले समीकरण में एक र का मान $क_१$ है और इसका उत्थापन अ में देने से अ का मान $अ_१$ हुआ तो $य = अ_१$, $र = क_१$ यह ऊपर के दो मुख्य समीकरणों को ठीक करेंगे। क्योंकि ये दोनों दूसरे समीकरण को तो प्रत्यक्ष ही में ठीक करते हैं और पहिले में चाहे र के स्थान में जिसका उत्थापन दें परन्तु सर्वदा समीकरण सत्य रहेगा यदि $य = अ$। इसलिये र के स्थान में $क_१$ के उत्थापन से भी पहिला समीकरण सत्य रहेगा। इस पर से यह सिद्ध होता है कि ऊपर जो अ, क, ख, ... के वश से समीकरण हैं उनके बाईं ओर के पक्षों को परस्पर गुण देने से गुणनफल शून्य के तुल्य होगा उसमें अ, क, ख, ... इनमें किसी दो के परस्पर बदल देने से भी गुणनफल में विकार न होगा। मान ज्यों का त्यों रहेगा। इसलिये गुणनफल अ, क, ख, का तद्रूपफल होगा। तब इस गुणनफल का मान $प_०, प_१, प_२$ ......के रूप में आ सकता है। जैसे

उदाहरण—(१)

$$प_०य^३ + प_१य^२ + प_२य + प_३ = ० \text{ और } ब_०य^२ + ब_१य + ब_२ = ०$$

ये दो समीकरण हैं जहां $प_०, प_१, \ldots\ldots; ब_०, ब_१, \ldots\ldots;$ र के फल हैं तो ऊपर के प्रक्रम के सङ्केत से

$$(ब_०अ^३ + ब_१अ^२ + ब_२अ + ब_३)\ (ब_०क^३ + ब_१क^२ + ब_२क + ब_३)$$
$$+ (ब_०ख^३ + ब_१ख^२ + ब_२ख + ब_३) = ० \text{ गुण देने से}$$

$$\text{ब}^{३}_{२} + \text{ब}^{२}_{१}\,\text{अकख} + \text{ब}^{३}_{०}\,\text{अ}^{२}\text{क}^{२}\text{ख}^{२} + \text{ब}^{२}_{०}\text{ब}_{२}\ \text{यौ अ}^{२}\text{क}^{२} +$$
$$\text{ब}^{२}_{०}\text{ब}_{१}\text{यौ अ}^{२}\text{क}^{२}\text{ख} + \text{ब}^{२}_{१}\text{ब}_{२}\text{यौ अक} + \text{ब}_{१}\text{ब}^{२}_{२}\ \text{यौ अ} +$$
$$\text{ब}_{०}\text{ब}^{२}_{२}\text{यौ अ}^{२} + \text{ब}_{०}\text{ब}^{२}_{१}\ \text{यौ अ}^{२}\text{कख} + \text{ब}_{०}\text{ब}_{१}\text{ब}_{२}\ \text{यौ अ}^{२}\text{क} = ०$$

और $\quad \text{अकख} = -\dfrac{\text{प}_{३}}{\text{प}_{०}},\ \text{अ}^{२}\text{क}^{२}\text{ख}^{२} = \dfrac{\text{प}^{२}_{३}}{\text{प}^{२}_{०}}$

$$\text{यौ अ}^{२}\text{क}^{२} = \text{अ}^{२}\text{क}^{२}\text{अ}^{२}\ \text{यौ}\ \frac{१}{\text{अ}^{२}} = \frac{\text{प}^{२}_{३}}{\text{प}^{२}_{०}}\left(\frac{\text{प}^{२}_{२}}{\text{प}^{२}_{३}} - \frac{२\,\text{प}_{१}}{\text{प}_{३}}\right)$$

$$\text{यौ अ}^{२}\text{क}^{२}\text{ख} = \text{अकख}\ \text{यौ अक} = -\frac{\text{प}_{३}}{\text{प}_{०}}\ \text{यौ अक} = -\frac{\text{प}_{२}\text{प}_{३}}{\text{प}^{२}_{०}}$$

$$\text{यौ अ} = -\frac{\text{प}_{१}}{\text{प}_{०}},\ \text{यौ अ}^{२} = \frac{\text{प}^{२}_{१}}{\text{प}^{२}_{०}} - \frac{२\,\text{प}_{२}}{\text{प}_{०}}$$

$$\text{यौ अ}^{२}\text{कख} = \text{अकख}\ \text{यौ अ} = \frac{\text{प}_{१}\text{प}_{३}}{\text{प}^{२}_{०}}$$

$$\text{यौ अ}^{२}\text{क} = \text{अकख}\ \text{यौ}\ \frac{\text{अ}}{\text{क}} = -\frac{\text{प}_{३}}{\text{प}_{०}}\left(\frac{\text{प}_{१}\text{प}_{२}}{\text{प}_{०}\text{प}_{३}} - ३\right)$$

(१६७वें प्रक्रम के उदाहरण की युक्ति से)।

गुणनफल में इनके उत्थापन से एक ऐसा समीकरण बनेगा जिसमें य न रहेगा।

१७५—ऊपर गुणनफल – रूप जो समीकरण बना है उसमें र का सब से बड़ा घात म, न से बड़ा न होगा। यदि पहिले समीकरण $\text{प}_{०}\text{य}^{\text{म}} + \text{प}_{१}\text{य}^{\text{म}-१} + \text{प}_{२}\text{य}^{\text{म}-२} \dots\dots\dots$ इसमें प्रत्येक पद में $\text{प}_{०}\text{प}_{१}$, इत्यादि में जो र का घात हो और जो य का घात इनका योग म से अधिक न हो और इसी प्रकार दूसरे समीकरण में भी प्रत्येक पद में र और य के घातों का योग न से अधिक न हो अर्थात् $\text{प}_{\text{द}}$ और $\text{ब}_{\text{द}}$ में र का सब से बड़ा घात द तक हो परन्तु द से अधिक न हो।

कल्पना करो कि १७४वें प्रक्रम की युक्ति से य को उड़ाया तो गुणनफलों में जो पदों की श्रेढी होगी उसमें किसी पद का रूप $ब_त अ^{न-त} \times ब_थ क^{न-थ} \times ब_ध ख^{न-ध} \times$ ....ऐसा होगा जहां गुण्य गुणक रूप खंडों की संख्या म तुल्य होगी। और यह भी जानते हो कि पदों की श्रेढी में अ, क, ख, का तद्रूपफल होगा; इसलिये ऊपर किसी पद का जो रूप दिखाया है वह $ब_त ब_थ ब_ध$......यौ$अ^{न-त} क^{न-थ} ख^{न-ध}$......... ऐसा होगा। इसमें कल्पना से स्पष्ट है कि त+थ+ध+......इससे बड़ा र का घात, $ब_त ब_थ ब_ध$......इसमें नहीं है और १६०वें प्रक्रम से स्पष्ट है कि $स_द$ में र का सब से बड़ा घात द से बड़ा नहीं होगा और १६२वें प्रक्रम से स्पष्ट है कि यौ $अ^{न-त} क^{न-थ} ख^{न-ध}$...... इसमें जो प्रत्येक पद में गुण्यगुणकरूप इत्यादि आवेंगे उनकी संख्याओं का योग न−त+न−थ+न−ध+.........यही होगा; इसलिये यौ $अ^{न-त} क^{न-थ} ख^{न-ध}$......इसमें र का सबसे बड़ा घात

$$न - त + न - थ + न - ध + \ldots\ldots = न म - (त + थ + ध + \cdots)$$

इससे बड़ा नहीं हो सकता; इसलिये

$ब_त ब_थ ब_ध$......यौ $अ^{न-त} क^{न-थ} ख^{न-ध}$......इसमें र का सब से बड़ा घात

$$न म - (त + थ + ध + \ldots\ldots) + (त + थ + ध + \ldots\ldots) = न म$$

इससे बड़ा नहीं हो सकता।

१७६—जितने समीकरण हों उतने ही उनमें अज्ञात वर्ण हों तो ऊपर की युक्ति से ऐसा एक समीकरण बन सकता है जिसमें एक वर्ण को छोड़ और सब वर्ण उड़ जायेंगे। और बने हुए

समीकरण में जो अज्ञात वर्ण होगा उसका सबसे बड़ा घात दिए हुए समीकरण जितने जितने घात के होंगे उन संख्याओं के गुणनफल से बड़ा नहीं होगा। इस अध्याय में जितनी बातें लिखी हैं उनसे अनेक नये चमत्कृत सिद्धान्त बन सकते हैं। इसलिये अब व्यर्थ ग्रन्थ बढ़ाना नहीं चाहते।

अभ्यास के लिये प्रश्न।

१। सिद्ध करो कि $य^न - १ = ०$ इसमें $स_म = ०$ यदि म, न का अपवर्त्य न हो और $स_म = न$ यदि म, न का अपवर्त्य हो। (१६४वें प्रक्रम की युक्ति से सिद्ध करो)

२। यदि फी $(य) = अ_० + अ_१ य + अ_२ य^२ + \cdots\cdots\infty$ तो इसमें

$$अ_म य^म + अ_{म+न} य^{म+न} + अ_{म+२न} य^{म+२न} + \cdots\cdots + \infty$$

इसका मान बताओ।

फी (य) और इसके विस्तृत रूप दोनों को $य^न - १ = ०$ इसके मान $आ_१, का_१,$ इत्यादि के न − म घात से अर्थात् $आ_१^{न-म}$, $का_१^{न-म}$ इत्यादि से गुण कर और य के स्थान में $आ_१ य, का_१ य$ इत्यादि का उत्थापन देकर जोड़ लो तो (१) उदाहरण की युक्ति से

$$अ_म य^म + अ_{म+न} य^{म+न} + अ_{म+२न} य^{म+२न} + \cdots\cdots + \infty$$

$$= \frac{१}{न} \Big\{ आ_१^{न-म} फी (आ_१ य) + का_१^{न-म} फी (का_१ य) +$$

$$ खा_१^{न-म} फी (खा_१ य) + \cdots\cdots \Big\}$$

३। $फी (य) = १ + य + \frac{य^{२}}{२!} + \frac{य^{३}}{३!} + \frac{य^{४}}{४!} + \ldots\ldots + \infty = इ^{य}$

इसमें $य + \frac{य^{४}}{४!} + \frac{य^{७}}{७!} + \ldots\ldots + \infty$ इसका मान बताओ।

उ० $\frac{१}{३}\{आ^{२}_{१}\, फी (आ_{१} य) + का^{२}_{१}\, फी (का_{१} य) + खा^{२}_{१}\, फी (खा_{१} य)\}$

$$= \frac{१}{३} इ^{य} - \frac{१}{३} इ^{-\frac{य}{२}} \left(कोज्या \frac{य\sqrt{३}}{२} - \sqrt{३}\; ज्या \frac{य\sqrt{३}}{२}\right)$$

४। सिद्ध करो कि $(य+र)^{न} - य^{न} - र^{न} =$ **फा** $(य)$ यह $य^{२} + यर + र^{२}$ इससे निःशेष होगा यदि न, धन अभिन्न हो और ३ का अपवर्त्य न हो और **फा** $(य)$ यह $(य^{२} + यर + र^{२})^{२}$ इससे निःशेष होगा यदि न धन अभिन्न $६म + १$ इस रूप का हो।

यदि $य^{३} - १ = ०$ इसमें अव्यक्त मान $१, आ_{१}, का_{१}$, मानो तो $य^{२} + यर + र^{२} = (य - आ_{१} र)\,(य - का_{१} र)$; इसलिये इसमें $य =$ $आ_{१} र$ और $का_{१} र$, य के स्थान में $आ_{१} र$ और $का_{१} र$ के उत्थापन से **फा** $(य) = ०$ यदि न इनका अपवर्त्य न हो तो **फा** $(य)$ अवश्य $य^{२} + यर + र^{२}$ इससे निःशेष होगा और उन्हीं के उत्थापन से **फा** $(य) = ०$ और **फा**$'(य) = ०$ यदि $न = ६म + १$ तो दो समान मान होने से **फा** $(य)$ यह $(य^{२} + यर + र^{२})^{२}$ इससे निःशेष होगा।

५। $य^{न} + र^{न} + (-य-र)^{न}$ इसका मान $य^{२} + यर + र^{२}$ और $यर\,(य+र)$ इनके रूप में लाओ।

मान लो कि $अ = य^{२} + यर + र^{२}$, $क = यर\,(य+र)$ और $ल = -य - र$ तो $य + र + ल = ०$, $यर + रल + लय = यर + ल(र+य)$ $= यर - (य+र)^{२} = -अ$ और $यरल = -क$

इसलिये य, र और ल $ट^३ - अट + क = ०$ इस घनसमीकरण में ट के मान होंगे।

$\therefore \frac{१}{न}(य^न + र^न + ल^न)$ यह १६४वें प्रक्रम से $-ला\left(१ - \frac{अ}{ट^२} + \frac{क}{ट^३}\right)$ इसके विस्तृत रूप के $\frac{१}{ट^न}$ के गुणक के समान होगा। परन्तु

$$-ला\left(१ - \frac{अ}{ट_२} + \frac{क}{ट^३}\right)$$

$$= \frac{१}{ट^२}\left(अ - \frac{क}{ट}\right) + \frac{१}{२ट^४}\left(अ - \frac{क}{ट}\right)^२ + \frac{१}{३ट^६}\left(अ - \frac{क}{ट}\right)^३ + \dots$$

अब इस पर से सहज में $\frac{१}{ट^न}$ इसके गुणक का पता लगा सकते हो। यदि न सम हो तो $य^न + र^न + (-य-र)^न = य^न + र^न + (य+र)^न$ और यदि न विषम हो तो चिन्ह के उलट देने से $(य+र)^न - य^न - र^न$ इसका मान भी जान सकते हो।

६। $(य+र)^७ - य^७ - र^७$ इसका मान $य^२ + यर + र^२$ और $यर(य+र)$ के रूप में निकालो।

यहां ५वें उदाहरण से $\frac{१}{ट^७}$ का गुणक $-अ^२क$ यह है; इसलिये चिन्ह उलट देने से $\frac{१}{७}\{य^७ + र^७ + (य-र)^७\}$ यह $अ^२क$ के समान होगा तब $(य+र)^७ - य^७ - र^७ = ७अ^२क =$

$$७(य^२ + यर + र^२)^२ यर(य+र)$$

७। सिद्ध करो कि $(य+र)^८ + य^८ + र^८$
$= २(य^२ + यर + र^२)\{(य^२ + यर + र^२)^३ + ४य^२र^२(य+र)^२\}$.

८। ५वें उदाहरण में न के स्थान में २म और २म+१ के उत्थापन से सिद्ध करो कि

$$\frac{(य+र)^{२म}+य^{२} \;+र^{२म}}{२म}=\frac{अ^{म}}{म}+\frac{म-२}{२\,!}\,अ^{म-३}क^{२}$$
$$+\frac{(म-३)\,(म-४)\,(म-५)}{४\,!}\,अ^{म-६}क^{४}+\cdots\cdots$$
$$+\frac{(म-त-१)\,(म-त-२)\cdots(म-३त+१)}{२त\,!}\,अ^{म-३त-}क^{२त}+\cdots\cdots$$

और

$$\frac{(य+र)^{२म+१}-य^{२म+१}-र^{२म+१}}{२म+१}=अ^{म-१}क+$$
$$\frac{(म-२)(म-३)}{३\,!}\times अ^{म-४}क^{३}+\cdots\cdots$$
$$+\frac{(म-त-१)(म-त-२)\cdots(म-३त)}{(२त+१)\,!}\times अ^{म-३त-१}क^{२त+१}+\cdots\cdots$$

९। सिद्ध करो कि फ(य)=०, इसके यदि सब मूल संभाव्य हों और सबसे बड़ा अ हो तो

$$अ=\frac{स_{म+१}}{स_{म}} \text{ जहां } म=\infty$$

१०। सिद्ध करो कि यदि $स_{म}स_{म+२}-स^{२}_{म+१}=श_{म}$ तो फ(य)=० इसके यदि सब मूल संभाव्य हों और उनमें अ, क ये दो और सबसे बड़े हों तो

$$\frac{श_{म+१}}{श_{म}}=अ\cdot क \text{ जहां } म=\infty$$

११। यदि $श_म$ यह १०वें उदाहरण का संकेत मान और $स_म स_{म+३} - स_{म+१} स_{म+२} = ष_म$ तो यदि फ(य) = ० इसके सब संभाव्य मूल हों और उनमें सबसे बड़े अ और क हों तो

$$\frac{ष_म}{श_म} = अ + क, \text{ जहां } म = \infty$$

१२। $य^३ + प_१ य^२ + प_२ य + प_३ = ०$ इसमें यदि अव्यक्त मान अ,क,ख हों तो सिद्ध करो कि

(१) $(अ + क + अक)(क + ख + कख)(ख + अ + अख)$
$$= (प_३ - प_२)^२ + प_१ (प_३ - प_२) + प_३$$

(२) $(अ + क - २ख)(क + ख - २अ)(अ + ख - २क)$
$$= २प^३_१ - ९प_१ प_२ + २७प_३$$

(३) यौ $(अ + क)^२ (अ + ख) = २प^३_१ + प_१ प_२ - ३प_३$

(४) $(क - ख)^२ (ख - अ)^२ (अ - क)^२$
$$= \frac{४}{३}(३प_२ - प^२_१)(३प_१ प_३ - प^२_२) - \frac{१}{३}(प_१ प_२ - ९प_३)^२$$

१३। सिद्ध करो $य^न + य + १ = ०$ इसमें $स_{न-१} - स_न = १$।

१४। $य^न + प_१ य^{न-१} + प_२ य^{न-२} + \cdots + प_{न-१} य + य_न = ०$, इसमें यदि अव्यक्त मान, अ,क,ख,ग,घ⋯⋯ट हों तो

यौ (अ + क) (अ + ख)⋯⋯(अ + ट) इसका मान बताओ।

यहां $फ(य) = य^न + प_१ य^{न-१} + \cdots \cdots प_न =$
$(य - अ)(य - क)\cdots\cdots(य - ट)$; $य = -अ$ मानने से

$$फ(-अ) = (-अ)^न + प_१ (-अ)^{न-१} + \cdots\cdots + प_न =$$
$$(-२अ)(-अ - क)\cdots\cdots(-अ - ट)$$
$$= (-१)^न २अ(अ + क)\cdots\cdots(अ + ट)$$

$$\therefore \frac{\text{फ}(-\text{अ})}{२\text{अ}(-१)^{\text{न}}} = \frac{१}{२}\{\text{अ}^{\text{न}-१} - \text{प}_१\text{अ}^{\text{न}-२} + \cdots\cdots + (-१)^{\text{न}}\text{प}_{\text{न}}\text{अ}^{-१}\} = (\text{अ}+\text{क})(\text{अ}+\text{ख})\cdots\cdots(\text{अ}+\text{ट})$$

इसी प्रकार
$$\frac{\text{फ}(-\text{क})}{२\text{क}(-१)^{\text{न}}} = \frac{१}{२}\{\text{क}^{\text{न}-१} - \text{प}_१\text{क}^{\text{न}-२} + \cdots\cdots + (-१)^{\text{न}}\text{प}_{\text{न}}\text{क}^{-१}\} = (\text{क}+\text{अ})(\text{क}+\text{ख})\cdots\cdots(\text{क}+\text{ट})$$

....

सब जोड़ लेने से

$$\text{यौ}(\text{अ}+\text{क})(\text{अ}+\text{ख})\cdots\cdots(\text{अ}+\text{ट}) = \frac{१}{२}\{\text{स}_{\text{न}-१} - \text{प}_१\text{स}_{\text{न}-२} + \text{प}_२\text{स}_{\text{न}-३} + \cdots\cdots + (-१)^{\text{न}}\text{प}_{\text{न}}\text{स}_{-१}\}$$

१५। ऊपर के समीकरण में यौ $\frac{(\text{अ}+\text{क})^२}{\text{अक}}$ का मान क्या होगा।

$$\text{यहां यौ} \frac{(\text{अ}+\text{क})^२}{\text{अक}} = \text{यौ}\frac{\text{अ}^२+२\text{अक}+\text{क}^२}{\text{अक}} = \text{यौ}(\text{अक}^{-१} + \text{अ}^{-१}\text{क} + २)$$

$$= \text{यौ}(\text{अ}^{-१}\text{क}) + \frac{२\text{न}(\text{न}-२)}{२} = \frac{\text{प}_१\text{प}_{\text{न}-१}}{\text{प}_{\text{न}}} + \text{न}^२ - २\text{न}।$$

१६। यौ $\frac{\text{अ}^२}{\text{क}}$ इसका मान बताओ।

यहां यौ $\frac{\text{अ}^२}{\text{क}} = \text{यौ अ}^२\text{क}^{-१}$ इस पर से

मान $= \text{प}_१ - \frac{\text{प}_{\text{न}-१}}{\text{प}_{\text{न}}}\text{स}_२$, क्योंकि १६२ वें प्रक्रम से

$$यौ\ अ^{म}क^{प} = यौ\ अ^{२}क^{-१} = स_{म}स_{प} - स_{म+प}$$
$$= स_{२}स_{-१} - स_{२-१}$$
$$= स_{२}स_{-१} - स_{१}$$
$$= प_{१} - \frac{प_{न-१}}{प_{न}} स_{२}$$

१७। $य^{४} + प_{१}य^{३} + प_{२}य^{२} + प_{३}य + प_{४} = ०$ इसमें यदि अव्यक्तमान अ, क, ख, ग हों तो यौ (अ + क) (ख + ग) इसका मान बताओ।

उ. यौ $(अ + क)(ख + ग) = २प_{२}$

१८। $य^{४} - य^{३} - ७य^{२} + य + ६ = ०$ इसमें दिखलाओ कि

$$स_{१} = १,\ स_{२} = १५,\ स_{३} = १९,\ स_{४} = ९९,\ स_{५} = २११$$
$$स_{६} = ७९५,\ स_{-१} = -\frac{१}{६},\ स_{-२} = \frac{८५}{३६}$$

१९। ऊपर के समीकरण में दिखाओ कि

$$स_{३} = -प^{३}_{१} + ३प_{१}प_{२} - ३प_{३}$$
$$स_{४} = प^{४}_{१} - ४प^{२}_{१}प_{२} + ४प_{१}प_{३} + २प^{२}_{२} - ४प_{४}$$

२०। ऊपर के चतुर्घात समीकरण में यदि अव्यक्त मान अ, क, ख, ग हो और

$आ = \frac{१}{२}(अक + खग)$, $का = \frac{१}{२}(अख + कग)$ और $खा = \frac{१}{२}(अग + कख)$ तो सिद्ध करो कि

$$आ + का + खा = \frac{प_{२}}{२},\ आका + काखा + खाआ =$$
$$\frac{१}{८}(स^{२}_{१}स_{२} - स^{२}_{२} - २स_{१}स_{३} + २स_{४})$$

२१। $अय^{४} + ४कय^{३} + ६खय^{२} + ४गय + घ = ०$ इसमें अव्यक्त मान यदि $अ_{१}, अ_{२}, अ_{३}, अ_{४}$, हों तो दिखलाओ कि

$$(अ_1 - अ_2)^2 (अ_2 - अ_3)^2 (अ_3 - अ_4)^2 (अ_1 - अ_3)^2 \times (अ_1 - अ_4)^2 (अ_2 - अ_4)^2$$

$$= \frac{२५६}{अ^6} \left\{ (अघ - ४अक + ३ख^2)^3 - २७(अग^2 + घक^2 + ख^3 - अखघ - २कखग)^2 \right\}$$

(१२२ प्रक्रम के अन्त में जो अभ्यास के लिये प्रश्न लिखे हैं उनमें १०वां प्रश्न देखो)

२२। $य^न + प_1 य^{न-1} + \cdots\cdots + प_न = 0$ इसमें यदि अव्यक्त मान अ, क, ख, ······ हों और

यदि $\frac{(अ+क)^2}{अक} = \frac{प_1 प_{न-1}}{प_न} + १५$ तो न का प्रमाण बताओ।

उ. ५।

२३। नीचे लिखे हुए दोहे से क्या समझते हो।

जर जोरत जरिगे चतुर डार पात छितिराय।
राय निकारत हार गे पार न भे छितिराय॥

बड़े समीकरण में अव्यक्त मान।

१५—कनिष्ठफल

१७७—$अ_1 क_2 + अ_2 क_1$ यह जो चार वर्ण का फल है जिसमें $\left.\begin{matrix} अ_1, क_1 \\ अ_2, क_2 \end{matrix}\right\}$ ये चार वर्ण हैं यह अ और क के आगे अङ्कपाश युक्ति से १, २, के जो भेद १,२ और २, १ होते हैं लगा देने से और उनके गुणन के जोड़ देने से उत्पन्न होता है।

इसी प्रकार

$$अ_1क_2ख_3 + अ_1क_3ख_2 + अ_2क_3ख_1 + अ_2क_1ख_3 + अ_3क_1ख_2 + अ_3क_2ख_1 \cdots\cdots (१)$$

यह फल

$अ_1,\quad क_1,\quad ख_1$

$अ_2,\quad क_2,\quad ख_2$

$अ_3,\quad क_3,\quad ख_3$

इन नव वर्णों का है जो कि अ क ख इस गुणनफल में १, २, ३ के अङ्कपाश युक्ति से जितने भेद होते हैं उन्हें क्रम से अ, क और ख के आगे लगा देने से और सब जोड़ लेने से उत्पन्न होता है। इसलिये चाहो तो ऐसे फल को लाघव से (अकख) इस सङ्केत से प्रकाश कर सकते हो जहां यह समझ लेना होगा कि १, २, ३ के छओ भेद क्रम से अ, क और ख के आगे लगा कर सब गुणनफलों को जोड़ लेना है।

ऊपर की युक्ति से (अ, क, ख, ग) इससे यह समझेंगे कि १, २, ३, ४ के जो २४ भेद होंगे उन्हें अ, क, ख और ग में लगा कर सब गुणनफलों को जोड़ लेना है।

इसी प्रकार यदि (अ क ख ग······) इसमें यदि न अक्षर हों तो १, २,···न के जो न ! भेद होंगे उन्हें क्रम से वर्णों के आगे लगा कर सब गुणनफलों के योग के समान (अ क ख ग......) इसका मान कहेंगे।

१७८—ऊपर के सङ्केत से (अक)= $अ_1क_2 + अ_2क_1$ यह जो फल होता है वह नीचे लिखे हुए चार वर्णों में कर्णगत दो दो वर्णों के गुणनफल के योग के तुल्य है।

$अ_1, क_1$
$अ_2, क_2$

ऐसे कर्णगत वर्णों के गुणन को हमारे यहां भास्कराचार्यादि वज्राभ्यास कहते हैं और ऐसे वज्राभ्यास के योग वा अन्तर रूपी संख्या को कनिष्ठ कहते हैं; इसीलिये हमने भी ऐसे फल की संज्ञा कनिष्ठफल लिखा है।

१७६—ऊपर जो कनिष्ठफल दिखलाया है उसमें स्पष्ट है कि प्रत्येक पद में यदि न अक्षर होंगे तो सब पद न! इतने होंगे इसमें न का मान दो से अधिक होने से न! यह समसंख्या होगी। इसलिये कनिष्ठफल में सर्वदा सब पद सम होंगे।

जिस कनिष्ठफल में आधे पद धन और आधे ऋण होते हैं उन्हीं कनिष्ठफलों को लेकर इस ग्रन्थ में कुछ विशेष कहा जायगा। इसलिये जब तक कि इसके विरुद्ध न कहा जाय सर्वदा कनिष्ठफल से वह फल समझो जिसमें आधे पद धन और आधे पद ऋण हों। जैसे

$$अ_1 य + क_1 र = 0$$
$$अ_2 य + क_2 र = 0$$

इनमें पहले से $य = \frac{-क_1 र}{अ_1}$ इसका उत्थापन दूसरे में देने से $क_2 र - \frac{अ_2 क_1 र}{अ_1} = 0$ छेदगम और र के अपवर्त्तन से

$$अ_1 क_2 - अ_2 क_1 = 0$$

इसी प्रकार

$$अ_1 य + क_1 र + ख_1 ल = 0$$
$$अ_2 य + क_2 र + ख_2 ल = 0$$

$$अ_३य + क_३र + ख_३ल = ०$$

इनमें पहिले दो से य और र का मान ल के रूप में जान कर उनका उत्थापन तीसरे में देने से और छेदगम और ल के अपवर्त्तन से

$$अ_१क_२ख_३ - अ_१क_३ख_२ + अ_२क_३ख_१ + अ_३क_१ख_२ - अ_२क_१ख_३ - अ_३क_२ख_१ = ० \cdots\cdots (२)$$

इस फल से और १७७ वें प्रक्रम के (१) से भेद इतना ही है कि (१) में सब पद धन हैं (२) में आधे पद धन और आधे ऋण हैं अर्थात् तीन पद धन और तीन पद ऋण हैं।

इसी प्रकार चार अज्ञातवर्ण समीकरण में $अ_१, क_१, ख_१, ग_१, अ_२, क_२, ख_२, ग_२$, इत्यादि सोरह वर्णों से ऊपर (२) के ऐसा एक कनिष्ठफल २४ पदों का होगा जिसमें १२ धन और १२ ऋण होंगे।

ऐसे कनिष्ठफल को काशी (Cauchy) ने

$\begin{vmatrix} अ_१ & क_१ \\ अ_२ & क_२ \end{vmatrix}$ इस संकेत से प्रकाश किया है। जैसे यहां इस संकेत से समझेंगे कि यह $अ_१क_२ - अ_२क_१$ इसके तुल्य है।

इसी प्रकार (२) कनिष्ठफल को

$$\begin{vmatrix} अ_१, & क_१, & ख_१ \\ अ_२, & क_२, & ख_२ \\ अ_३, & क_३, & ख_३ \end{vmatrix}$$

इससे प्रकाश करते हैं।

और साधारण से $न^२$ वर्णों में जहां वर्ण

$$अ_१, क_१, ख_१, \cdots\cdots ट_१ \text{ हैं}$$

कनिष्ठफल

$$\begin{vmatrix} अ_1, क_1, ख_1, \cdots\cdots\cdots\cdots ट_1 \\ अ_2, क_2, ख_2, \cdots\cdots\cdots\cdots ट_2 \\ अ_3, क_3, ख_3, \cdots\cdots\cdots\cdots ट_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ अ_न, क_न, ख_न, \cdots\cdots\cdots\cdots ट_न \end{vmatrix}$$

इससे प्रकाश करते हैं। इस कनिष्ठफल में धनर्ण पदों के जानने के लिये इस संकेत में $अ_1, क_1, ख_1, \cdots\cdots$ इत्यादि अक्षरों को ध्रुवा कहते हैं। $अ_1, क_1, ख_1, \cdots\cdots$ इत्यादि जिस पंक्ति को बनाते हैं उसे तिर्यक् पंक्ति और $अ_1, अ_2, अ_3 \cdots\cdots$ इत्यादि जिस पंक्ति को बनाते हैं उसे ऊर्ध्वाधर पंक्ति कहते हैं। बाम भाग की ऊर्ध्वाधर पंक्ति के शिर से लेकर दक्षिण भाग की ऊर्ध्वाधर पंक्ति के पाद तक कर्ण पंक्ति में जो $अ_1, क_2, ख_3, \cdots ट_न$ ये वर्ण हैं इनके गुणनफल $अ_1 क_2 ख_3 \cdots ट_न$ को धन पद और प्रधान पद कहते हैं। कनिष्ठ फल के रूप से स्पष्ट है कि कनि- ष्ठफल के प्रत्येक पद में प्रत्येक ऊर्ध्वाधर पंक्तिस्थ एकही ध्रुव और प्रत्येक तिर्यक् पंक्तिस्थ एकही ध्रुव हैं; इसलिये ऊर्ध्वाधरस्थ एकही ध्रुव और तिर्यक्स्थ एकही ध्रुव लेकर जितने न अक्षरों के गुणनफल संभव होंगे वे ही कनिष्ठफल में सब पद होंगे। इनमें कौन धन और कौन ऋण होंगे इसके लिये ऊपर प्रधान और धन पद बनाया है। प्रधान पद में देखो वर्णमाला के क्रम से तो अक्षर हैं और संख्याओं के क्रम से १, २,⋯⋯ न संख्या हैं।

प्रधान पद में अक्षरों के आगे जो संख्यायें लगी हैं उनमें से दो संख्याओं को उलट कर उन दो अक्षरों के आगे लगा

देने से जो पद बनेगा वह ऋणात्मक होगा। जैसे $अ_{१}$, $क_{१}$, $ख_{१}$, $ग_{१}$, $घ_{१}$, $अ_{२}$······इत्यादि २५ अक्षरों से पूर्व सङ्केत से प्रधान पद $अ_{१}\ क_{२}\ ख_{३}\ ग_{४}\ घ_{५}$ यह होगा इसमें क के आगे जो २ है उसे घ के आगे लगा देने से और घ के आगे जो ५ है उसे क के आगे लगा देने से जो $अ_{१}\ क_{५}\ ख_{३}\ ग_{४}\ घ_{२}$ यह पद बनेगा वह ऋणात्मक होगा। इस क्रिया से स्पष्ट है कि दो दो अक्षरों की संख्याओं का एक बेर परिवर्त्तन से ऋण, दो बेर के परिवर्त्तन से धन, तीन बेर परिवर्त्तन से ऋण, चार बेर परिवर्त्तन से धन इस प्रकार सम बेर परिवर्त्तन से धन और विषम बेर परिवर्त्तन से ऋण होगा। इस क्रिया से प्रधान पद के बल से पदों के चिन्हों का ज्ञान हो जायगा। जैसे

$$\begin{vmatrix} अ_{१}, & क_{१}, & ख_{१} \\ अ_{२}, & क_{२}, & ख_{२} \\ अ_{३}, & क_{३}, & ख_{३} \end{vmatrix}$$

इसमें प्रधान और धन पद $अ_{१}क_{२}ख_{३}$ यह हुआ। क, ख की संख्याओं के परिवर्त्तन से $अ_{१}क_{३}ख_{२}$ यह ऋण हुआ। इसमें अ, ख की संख्याओं के परिवर्त्तन से $अ_{२}ख_{३}क_{१}$ यह धन हुआ। इसमें क, ख की संख्याओं के परिवर्त्तन से $अ_{२}क_{१}ख_{३}$ यह ऋण हुआ। इसमें अ, ख की संख्याओं के परिवर्त्तन से $अ_{३}क_{१}ख_{२}$ यह धन हुआ। इसमें क, ख की संख्याओं के परिवर्त्तन से $अ_{३}क_{२}ख_{१}$ ऋण हुआ। इस प्रकार

$$कनिष्ठफल = अ_{१}क_{२}ख_{३} - अ_{१}क_{३}ख_{२} + अ_{२}क_{३}ख_{१} - अ_{२}क_{१}ख_{३} + अ_{३}क_{१}ख_{२} - अ_{३}क_{२}ख_{१}$$ यह वही पद है जो (२) है।

१८०—पद के धन, ऋण जानने का सहज उपाय—

जो दिया हुआ पद हो उसमें प्रथम जो संख्या हो उसे देखो कि प्रधान पद में कहा है और जहां है वहां से कितने स्थान पीछे हटाने से प्रथम स्थान में आती है। उस हटाए हुए स्थान की संख्या को अलग लिख छोड़ो। और प्रधान पद के पहिले दिए हुए पद की प्रथम संख्या लिख उसके आगे क्रम से इस संख्या को छोड़ और प्रधान पद की सब संख्याओं को लिख कर इसे अब प्रधान पद मानो। इसमें जहां पर दिए हुए पद की दूसरी संख्या हो उसे देखो कि कितने स्थान पीछे हटाने से नये प्रधान पद में दूसरी स्थान की संख्या होती है। इस हटाए हुए स्थान को भी अलग लिख छोड़ो और अपने इस प्रधान पद में दिए हुए पद की प्रथम संख्या के और उसके आगे जो संख्या है उनके बीच में दिए हुए पद की दूसरी संख्या रख आगे क्रम से इस संख्या को छोड़ और सब संख्याओं को लिख कर इसे नया प्रधान पद समझो। इसमें दिए हुए पद की तीसरी संख्या को देखो कि कितने स्थान पीछे हटाने से तीसरी संख्या होती है। उस स्थान संख्या को अलग लिख छोड़ो और इस पर से फिर पूर्ववत् नया प्रधान पद बनाओ। यों बार बार कर्म करते जाओ जब तक कि दिया पद न बन जाय। फिर सब स्थान संख्या जो अलग लिखी हुई हैं उनके जोड़ने से यदि योग सम हो तो दिए हुए पद को धन समझो और यदि योग विषम हो तो ऋण जानो।

जैसे उदाहरण—(१) जहां पंक्ति में सात सात वर्ण हैं वहां $अ_{३}क_{७}ख_{६}ग_{५}घ_{१}ङ_{४}च_{२}$ यह पद धन वा ऋण होगा। यहां पदों की यथा क्रम संख्या लेने से ३७६५१४२ यह संख्या हुई और पूर्व युक्ति से प्रधान पद की संख्या से १२३४५६७ यह

संख्या होती है। इसमें दिए हुए पद की आदि संख्या ३ दो स्थान हटाने से आदि में आती है; इसलिये नये प्रधान पद की संख्या ३१२४५६७, इस प्रकार ऊपर की क्रिया से

१	प्रधानपद	=	१२३४५६७	। दिया पद			३७६५१४२
२	"	=	३१२४५६७	। हटे स्थान की संख्या			२
३	"	=	३७१२४५६	।	"	"	५
४	"	=	३७६१२४५	।	"	"	४
५	"	=	३७६५१२४	।	"	"	३
६	"	=	३७६५१२४	।	"	"	०
७	"	=	३७६५१४२	।	"	"	१
८	"	=	३७६५१४२	।	"	"	०
					योग	=	१५

१५ के विषम होने से दिया हुआ पद ऋणात्मक हुआ।

(२) १७६ प्रक्रम में जो कनिष्ठफल $न^{२}$· अक्षरों से बना है उसमें जिस कर्ण पंक्ति में प्रधान पद है उसे छोड़ दूसरे कर्ण पंक्ति का $अ_{न}\, क_{न-१}\, ख_{न-२} \cdots\cdots ट_{१}$ यह पद बताओ किस चिन्ह का होगा।

यहां क्रम से हटाए गए स्थानों की संख्या

$$(न-१)+(न-२)+(न-३)+\cdots\cdots+२+१=\frac{न\,(न-१)}{२}$$

इसलिये पद का चिन्ह $(-१)^{\frac{न(न-१)}{२}}$ यह होगा।

१८१—किसी दो तिर्यक् वा ऊर्ध्वाधर पंक्तिओं के बदल देने से कनिष्ठफल का चिन्ह बदल जाता है।

१७९ प्रक्रम में जो क्रिया लिखी है उससे चार अक्षरों की पंक्ति में यह प्रधान पद $अ_1\ क_2\ ख_3\ ग_4$ धन होगा और २,४ के बदलने से $अ_1 क_4 ख_3 ग_2 = अ_1 ग_2 ख_3 क_4$ इसलिये जिस तिर्यक् पंक्ति में $क_2$ और $ग_4$ हैं उन्हें परस्पर उलट पुलट दें वा जिस उर्ध्वाधर पंक्ति में $क_2$ और $ग_4$ है उन्हें परस्पर उलट पुलट दें, पद का मान $अ_1\ ग_2\ ख_3\ क_4$ यही रहेगा जो कि प्रधान पद के वश से ऋण होगा। इस प्रकार तिर्यक् वा उर्ध्वाधर दो पंक्तिओं के परस्पर बदलने से सब पदों के चिन्ह उलट जायँगे; इसलिये कनिष्ठफल का चिन्ह भी बदल जायगा। इस पर से किसी पद के चिन्ह जानने के लिये नीचे की युक्ति उत्पन्न होती है।

उर्ध्वाधर वा तिर्यक् पंक्तिओं को क्रम से हटा हटा कर नया वर्गाकार ऐसा कोष्ठ बनाओ जिसमें दिए हुए पद के सब अक्षर क्रम से प्रधान पद रूप होकर प्रधान कर्ण पंक्ति में आ जायँ, तब जै जै बार पंक्तिआं हटाई गई हों उन हटी संख्याओं का योग विषम होने से अभीष्ट दिया हुआ पद ऋण और सम होने से धन होगा।

उदाहरण

अ,	क,	ग,	<u>य</u>
आ,	<u>का,</u>	गा,	र
त,	थ,	<u>द,</u>	ल
<u>ता,</u>	था,	दा,	•

इसमें ता का द य इस पद का चिन्ह बताओ। यहां चौथी तिर्यक पक्ति को तीन स्थान हटाने से

ता,	था,	दा,	०	
अ,	क,	ग,	य	हटा स्थान ३
आ,	का,	गा,	र	
त,	थ,	द,	ल	

इसमें जिस पंक्ति में का है उसे एक स्थान हटाने से

ता,	था,	दा,	०	
आ,	का,	गा,	र	हटा स्थान १
अ,	क,	ग,	य	
त,	थ,	द,	ल	

इसमें जिस पंक्ति में द है उसे एक स्थान हटाने से

ता,	था,	दा,	०	
आ,	का,	गा,	र	हटा स्थान १
त,	थ,	द,	ल	
अ,	क,	ग,	य	

इसमें दिए हुए पद के सब अक्षर अब प्रधान कर्ण पंक्ति में हो गए और हटे स्थानों का योग ५ विषम है; इसलिये दिया हुआ पद ऋण होगा।

१८२—किसी कनिष्ठफल में यदि दो तिर्यक् पंक्ति वा दो ऊर्ध्वाधर पंक्ति आपस में तुल्य हों अर्थात् दोनों पंक्तिओं के वे ही अक्षर हों तो कनिष्ठफल शून्य होगा।

क्योंकि १८१ प्र० से दो पंक्तिओं के परस्पर बदल देने से कनिष्ठफल का चिन्ह बदल जायगा। परन्तु ऐसी स्थिति में दोनों पंक्तिओं के बदलने से फल ज्यों का त्यों रहेगा; इसलिये

कफ = —कफ

∴ २कफ = ० अर्थात् कफ = ० यह सिद्ध हुआ।

१८३—किसी कनिष्ठफल में यदि सब तिर्यक् पंक्तिओं को ऊर्ध्वाधर रूप में वा सब ऊर्ध्वाधर पंक्तिओं को तिर्यक् रूप में लिखें तो कुछ विकार नहीं उत्पन्न होता, कनिष्ठफल ज्यों का त्यों रहता है।

क्योंकि दोनों स्थितिओं में प्रधान पद तो ज्यों का त्यों रहेगा। और जो प्रत्येक पद ऊर्ध्वाधरस्थ और तिर्यक्स्थ एक एक ध्रुव के वश से होंगे वे भी दोनों स्थितिओं में एक ही रहेंगे। १८१ प्र० से पद के चिन्ह ज्ञान के लिये प्रथम स्थिति में प्रधान कर्णपंक्ति में दिए हुए पद के अक्षरों को ले आने के लिये जितनी बार पंक्तिआं हटाई जायँगी उन संख्याओं का इतना ही योग होगा जितना कि दूसरी स्थिति में उर्ध्वाधर पंक्तिओं को हटाने से योग होगा—जैसे

$$\begin{vmatrix} \text{अ}_1, & \text{क}_1, & \underline{\text{ख}_1}, & \text{ग}_1 \\ \underline{\text{अ}_2}, & \text{क}_2, & \text{ख}_2, & \text{ग}_2 \\ \text{अ}_3, & \text{क}_3, & \text{ख}_3, & \underline{\text{ग}_3} \\ \text{अ}_4, & \underline{\text{क}_4}, & \text{ख}_4, & \text{ग}_4 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \text{अ}_1, & \underline{\text{अ}_2}, & \text{अ}_3, & \text{अ}_4 \\ \text{क}_1, & \text{क}_2, & \text{क}_3, & \underline{\text{क}_4} \\ \underline{\text{ख}_1}, & \text{ख}_2, & \text{ख}_3, & \text{ख}_4 \\ \text{ग}_1, & \text{ग}_2, & \underline{\text{ग}_3}, & \text{ग}_4 \end{vmatrix}$$

यहां दोनों स्थितिओं में प्रधान कर्णपंक्तिओं में क्रम से अक्षरों को ले आने से पंक्तिओं की हटी हुई संख्याओं का योग

३ है; इसलिये $अ_{२}क_{४}ख_{१}ग_{३}$ इसका चिन्ह दोनों में एक ही होगा।

१८४—किसी एक पंक्ति के प्रत्येक ध्रुवाङ्क को यदि एक ही गुणक से गुण दें तो अब जो नया कनिष्ठफल होगा वह उसी गुण गुणित प्रथम कनिष्ठफल के तुल्य होगा।

क्योंकि प्रत्येक पद में उस पंक्ति के अब गुण गुणित ध्रुवाङ्क होंगे। इसलिये अब प्रत्येक पद के योग वियोग से जो नया कनिष्ठफल होगा वह पहिले कनिष्ठफल से गुण गुणित होगा।

अनुमान—(१) किसी पंक्ति के ध्रुवाङ्क एक गुण से गुणित यथा क्रम दूसरी पंक्ति के ध्रुवाङ्क हों तो कनिष्ठफल शून्य के तुल्य होगा।

क्योंकि

$$\begin{vmatrix} मअ_{१}, & अ_{१}, & ख_{१} \\ मअ_{२}, & अ_{२}, & ख_{२} \\ मअ_{३}, & अ_{३}, & ख_{३} \end{vmatrix} \equiv म \begin{vmatrix} अ_{१}, & अ_{१}, & ख_{१} \\ अ_{२}, & अ_{२}, & ख_{२} \\ अ_{३}, & अ_{३}, & ख_{३} \end{vmatrix} \equiv ०,$$

१८४ और १८२ प्रक्रम से।

अनुमान—(२) यदि किसी पंक्ति के ध्रुवाङ्क के चिन्ह को उलट दें तो कनिष्ठफल विपरीत चिन्ह का हो जायगा।

क्योंकि १४८ प्रक्रम से

$$\begin{vmatrix} मअ_{१}, & क_{१}, & ख_{१} \\ मअ_{२}, & क_{२}, & ख_{२} \\ मअ_{३}, & क_{३}, & ख_{३} \end{vmatrix} \equiv म \begin{vmatrix} अ_{१}, & क_{१}, & ख_{१} \\ अ_{२}, & क_{२}, & ख_{२} \\ क_{३}, & क_{३}, & ख_{३} \end{vmatrix} = म \cdot कफ$$

इसमें यदि म = −१ तो प्रथम रेखाद्वयान्तर्गत प्रथम ऊर्ध्वाधर पंक्ति के ध्रुवाङ्कों का चिन्ह परिवर्त्तन हो जायगा और वह म·कफ इसके अर्थात् −कफ इसके तुल्य होगा।

उदाहरण—(१) सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} १ & २ & ३ & ४ \\ ५ & ६ & ७ & ८ \\ ९ & १० & ११ & १२ \\ १५ & १८ & २१ & २४ \end{vmatrix} = ०$$

जहां अन्तिम तिर्यक् पंक्ति के ध्रुवाङ्कों में यदि ३ का भाग दो तो दूसरी तिर्यक् पंक्ति के ध्रुवाङ्क हो जाते हैं इसलिये १८४ प्रक्रम के १ अनुमान से कनिष्ठफल शून्य होगा।

(२) सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} कख & अ & अ^२ \\ खअ & क & क^२ \\ अक & ख & ख^२ \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} १ & अ^२ & अ^३ \\ १ & क^२ & क^३ \\ १ & ख^२ & ख^३ \end{vmatrix}$$

(३) सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} ८ & ३ & ६ \\ ३ & १५ & ७ \\ ४ & २७ & २ \end{vmatrix} \equiv ३ \begin{vmatrix} ८ & १ & ६ \\ ३ & ५ & ७ \\ ४ & ९ & २ \end{vmatrix}$$

(४) सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} अकख & अ^२ & अ^३ \\ अकख & क^२ & क^३ \\ अकख & ख^२ & ख^३ \end{vmatrix} = अकख \begin{vmatrix} कख & अ & अ^२ \\ खअ & क & क^२ \\ अक & ख^२ & ख^३ \end{vmatrix}$$

(५) सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} २ & १ & -७ \\ -४ & -३ & ८ \\ ६ & ५ & -९ \end{vmatrix} = २ \begin{vmatrix} १ & १ & ७ \\ २ & ३ & ८ \\ ३ & ५ & ९ \end{vmatrix}$$

(६) सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} \text{अ} & \text{क} & \text{ख} \\ \text{अ}' & \text{क}' & \text{ख}' \\ \text{अ}'' & \text{क}'' & \text{ख}'' \end{vmatrix} = \frac{१}{\text{अ क ख}} \begin{vmatrix} १ & १ & १ \\ \text{अ}'\text{कख} & \text{क}'\text{खअ} & \text{ख}'\text{अक} \\ \text{अ}''\text{कख} & \text{क}''\text{खअ} & \text{ख}''\text{अक} \end{vmatrix}$$

(७) सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} ४ & २ & ५ & १० \\ १ & १ & ६ & ३ \\ ७ & ३ & ० & ५ \\ ० & २ & ५ & ८ \end{vmatrix} = \frac{१}{५\cdot१०\cdot४\cdot२} \begin{vmatrix} २० & २० & २० & २० \\ ५ & १० & २४ & ६ \\ ३५ & ३० & ० & १० \\ ० & २० & २० & १६ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} १ & १ & १ & १ \\ ५ & १० & २४ & ६ \\ ७ & ६ & ० & २ \\ ० & ५ & ५ & ४ \end{vmatrix}$$

(८) सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} १ & १ & १ \\ \text{अ} & \text{क} & \text{ख} \\ \text{अ}^{२} & \text{क}^{२} & \text{ख}^{२} \end{vmatrix} \equiv (\text{क} - \text{ख})\,(\text{ख} - \text{अ})\,(\text{अ} - \text{क})$$

इसमें यदि क के स्थान में ख का उत्थापन दो तो दो पंक्तिओं के अक्षर समान होने से क फ = ०; इसलिये क फ, क — ख इससे निःशेष होगा। इसी युक्ति से क फ, ख — अ, और अ — क इनसे भी निःशेष होगा। इसलिये तीनों के घात को किसी स्थिर संख्या से गुण देने से क फ होगा। परन्तु दोनों फल में ध्रुव शक्ति ३ है; इसलिये वह स्थिर संख्या कनिष्ठफल के प्रत्येक पद में होगा। परन्तु कनिष्ठफल का प्रधान पद क $\text{ख}^{२}$ है जिसमें स्थिर गुणक + १ है। इसलिये ऊपर का सरूप समीकरण सत्य हुआ।

(९) ऊपर की युक्ति से सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} १ & १ & १ & १ \\ \text{अ} & \text{क} & \text{ख} & \text{ग} \\ \text{अ}^{२} & \text{क}^{२} & \text{ख}^{२} & \text{ग}^{२} \\ \text{अ}^{३} & \text{क}^{३} & \text{ख}^{३} & \text{ग}^{३} \end{vmatrix} = -(\text{क} - \text{ख})\,(\text{अ} - \text{ग})\,(\text{ख} - \text{अ})\,(\text{क} - \text{ग}) \times (\text{अ} - \text{क})\,(\text{ख} - \text{ग})$$

१८५—किसी कनिष्ठफल में यदि जितना ऊर्ध्वाधर पंक्ति निकाल ली जाय और उतना ही तिर्यक् पंक्ति निकाल ली जाय तो अवशिष्ट पंक्तिओं के यथाक्रम ध्रुवाङ्कों से जो अब नया कनिष्ठफल होगा उसे लघु कनिष्ठफल कहते हैं।

यदि एक ऊर्ध्वाधर और एक ही तिर्यक् पंक्ति निकाली गई हो तो अवशिष्ट पंक्तिओं से बने लघु कनिष्ठफल को पहिला लघु कनिष्ठफल कहते हैं। यदि दो ऊर्ध्वाधर और दो ही तिर्यक् पंक्तिओं को निकाल कर अवशिष्ट पंक्तिओं से लघु कनिष्ठफल बना हो तो इसे दूसरा लघु कनिष्ठफल कहते हैं। इसी प्रकार आगे भी जानना चाहिए।

निकाली हुई पंक्तिओं में जो उभयनिष्ठ ध्रुवा हैं उनसे भी एक कनिष्ठफल उत्पन्न होगा। अवशिष्ट पंक्तिओं के ध्रुवाङ्कों से जो लघु कनिष्ठफल होता है वह निकाली हुई पंक्तिओं के उभयनिष्ठ ध्रुवाङ्कोद्भव कनिष्ठफल का पूरक कहाता है। यदि प्रधान ध्रुव $अ_1$ सम्बन्धी पूरक हो तो इसे प्रधान प्रथम लघु कहते हैं। और इसका जो प्रधान प्रथम लघु होगा उसे आदि कनिष्ठफल का प्रधान द्वितीय लघु कहेंगे।

एक एक ऊर्ध्वाधर और तिर्यक् पंक्ति के निकालने से जो लघु कनिष्ठफल बनता है उसे $कफ_{अ}$ इस संकेत से प्रकाश करते हैं। दो दो पंक्तिओं के निकालने से जो लघु कनिष्ठफल होता है उसे $कफ_{अ,क}$ इस संकेत से प्रकाश करते हैं। इसी प्रकार आगे भी जानना चाहिए।

इसी प्रकार $\text{कफ}_{\text{अ}_1}$ इससे प्रधान प्रथम लघु कनिष्ठफल को और $\text{कफ}_{\text{अ}_1,\text{क}_2}$ इससे प्रधान द्वितीय लघु कनिष्ठफल को प्रकाश करते हैं।

संक्षेप से किसी कनिष्ठफल को प्रधानपद लेकर $\text{यो}\pm\text{अ}_1\text{क}_2\text{ख}_3\cdots\cdots\text{ट}_n$ इस संकेत से प्रकाश करते हैं।

यह संकेत दिखलाता है कि अङ्कपाश से १, २, ३......म इनके जितने भेद हों उन्हें अ, क, ख,......ट इनके आगे रख कर सब के गुणनफल से जितने पद बनते हों उनके १८०वें प्रक्रम से जो चिन्ह हों उनके सहित सभों के योग वियोग से जो संख्या हो वही इस संकेत से समझो।

१८६—पिछले प्रक्रमों से सिद्ध है कि कनिष्ठफल के प्रत्येक पद में ऊर्ध्वाधरस्थ और तिर्यक्स्थ प्रत्येक ध्रुवाङ्क एक ही बेर आते हैं। इसलिये

$$\text{कफ}=\text{अ}_1\text{आ}_1+\text{अ}_2\text{आ}_2+\text{अ}_3\text{आ}_3+\cdots\cdots$$
$$\text{कफ}=\text{क}_1\text{का}_1+\text{क}_2\text{का}_2+\text{क}_3\text{का}_3+\cdots\cdots$$
$$\text{वा, कफ}=\text{अ}_1\text{आ}_1+\text{क}_1\text{का}_1+\text{ख}_1\text{खा}_1+\cdots\cdots$$
$$\text{कफ}=\text{अ}_2\text{आ}_2+\text{क}_2\text{का}_2+\text{ख}_2\text{खा}_2+\cdots\cdots$$

यदि अ_1, क_1, ख_1, ग_1,...चार अक्षरों की पंक्ति में पूर्व रीति से कनिष्ठफल को बनाओ और अ_1, अ_2, अ_3 और अ_4 के गुणकों को अलग कर उनसे नये कनिष्ठफलों को बनाओ तो ऊपर दिए हुए $\text{अ}_1\text{आ}_1+\text{अ}_2\text{आ}_2+\text{अ}_3\text{आ}_3+\cdots\cdots$ इस कनिष्ठफलमें

$$\text{आ}_1=\begin{vmatrix}\text{क}_2 & \text{ख}_2 & \text{ग}_2\\ \text{क}_3 & \text{ख}_3 & \text{ग}_3\\ \text{क}_4 & \text{ख}_4 & \text{ग}_4\end{vmatrix}\quad \text{आ}_2=\begin{vmatrix}\text{क}_1 & \text{ख}_1 & \text{ग}_1\\ \text{क}_4 & \text{ख}_4 & \text{ग}_4\\ \text{क}_3 & \text{ख}_3 & \text{ग}_3\end{vmatrix}\quad \text{आ}_3=\begin{vmatrix}\text{क}_1 & \text{ख}_1 & \text{ग}_1\\ \text{क}_2 & \text{ख}_2 & \text{ग}_2\\ \text{क}_4 & \text{ख}_4 & \text{ग}_4\end{vmatrix}$$

और $आ_३ = \begin{vmatrix} क_१ & ख_१ & ग_१ \\ क_३ & ख_३ & ग_३ \\ क_२ & ख_२ & ग_२ \end{vmatrix}$ ये आते हैं।

ऊपर स्पष्ट है कि $कफ = अ_१ आ_१ + अ_२आ_२ + अ_३आ_३ + \cdots\cdots + अ_नआ_न$ यहां ऊपर ही की युक्ति से स्पष्ट है कि $आ_१$, $आ_२$, $आ_न$ ये $न - १$ अक्षर सम्बन्धि पंक्तिओं का कनिष्ठफल होगा। इसलिये १, २, ३,.........न इसके भेद में यदि १ को प्रधान स्थान में सर्वदा स्थिर रक्खें तो जितने भेद में १ प्रथम स्थित रहेगा उनकी संख्या अंकपाश से $(न-१)!$ इतनी होगी और

$$अ_१आ_१ = अ_१यौ \pm क_२ख_३ \cdots\cdots\cdots\cdots ट_न \text{ इसलिये}$$

$$आ_१ = यौ \pm क_२ख_३ \cdots ट_न = \begin{vmatrix} क_२ & ख_२ \cdots\cdots\cdots\cdots ट_२ \\ क_३ & ख_३ \cdots\cdots\cdots\cdots ट_३ \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ क_न & ख_न \cdots\cdots\cdots\cdots ट_न \end{vmatrix}$$

और यह कनिष्ठफल १८५वें प्रक्रम से $अ_१$ ध्रुव सम्बन्धी प्रधान प्रथम लघु होगा जो कि $कफ_{अ_१}$ इसके तुल्य है। इसलिये $आ_१ = कफ_{अ_१}$ ।

$आ_२$ के जानने के लिये जिस तिर्यक् पंक्ति में $अ_२$ है उसको एक बेर ऊपर हटाकर रखने से $अ_१$ के स्थान में $अ_२$ हो जायगा। और कनिष्ठफल का चिन्ह भी बदलजायगा। (१८२ प्रक्रम देखो) इसलिये ऊपर ही की युक्ति से $आ_२ = - कफ_{अ_२}$, यहां $कफ_{अ_२}$ से यह समझना चाहिए कि $अ_१$ के स्थान में पंक्ति के हटाने से $अ_२$ के आ जाने पर $अ_२$ ध्रुवसम्बन्धी प्रधान लघु कनिष्ठफल है। इसी प्रकार $अ_३$ की पंक्ति दो बेर हटाने

से $अ_1$ के स्थान पर $अ_3$ पहुँचेगा। इसलिये ऊपर ही की युक्ति और सङ्केत से $आ_3 = कफ_{अ_3}$। इस प्रकार विषम में ऋण, सम में धन होने से

$$कफ = अ_1 \, कफ_{अ_1} - अ_2 कफ_{अ_2} + अ_3 कफ_{अ_3} - अ_4 कफ_{अ_4} + \cdots\cdots$$

इस प्रकार कनिष्ठफल को किसी ऊर्ध्वाधर वा तिर्यक् पंक्तिस्थ ध्रुवाङ्कों के रूप में प्रकाश कर सकते हैं। जैसे

$$कफ = अ_1 \, कफ_{अ_1} - क_1 \, कफ_{क_1} + ख_1 \, कफ_{ख_1} - \cdots\cdots\cdots\cdots$$

किसी लघुकनिष्ठफल (जो कि किसी ध्रुव को गुणता है) का चिन्ह जानना हो तो समझ लेना चाहिए कि कितने बार तिर्यक् पंक्ति और फिर कितने बार ऊर्ध्वाधर पंक्ति के हटाने से अभीष्ट ध्रुवाङ्क प्रधान $अ_1$ के स्थानपर पहुँचता है। उन हटे हुए स्थानों का योग विषम हो तो उस लघु कनिष्ठ को ऋण और सम हो तो धन समझना चाहिए। जैसे

$यौ \pm अ_1 क_2 ख_3 ग_4 घ_5 ङ_6$ इसका मान चतुर्थ ऊर्ध्वाधर पंक्ति के रूप में अर्थात्

$कफ = ग_1 गा_1 + ग_2 गा_2 + ग_3 गा_3 + \cdots\cdots$ ऐसा जो होगा उसमें $ग_3 गा_3 = ग_3 \, कफ_{ग_3}$ इसका क्या चिन्ह होगा यह जानना हो तो यहां दो बेर तिर्यक् पंक्ति को ऊपर ले जाने से फिर तीन बेर ऊर्ध्वाधर पंक्ति को बाईं ओर हटाने से तब $ग_3$ प्रधानस्थान $अ_1$ पर पहुँचेगा। इसलिये दोनों हटे हुए स्थानों का योग ५ विषम होने से सिद्ध हुआ कि $ग_3 \, कफ_{ग_3}$ यह ऋण चिन्ह का होगा।

चिन्ह जानने के लिये ऊपर ही की युक्ति से नीचे की क्रिया उत्पन्न होती है। $अ_{1,1}$ से ऊपर की तिर्यक् पंक्ति में गिनती करो

कि कितनी संख्या पर वह ऊर्ध्वाधर पंक्ति आती है जिसमें कि अपना उद्दिष्ट ध्रुवाङ्क है फिर वहां से उसी संख्या के आगे से उस ऊर्ध्वाधर पंक्ति में नीचे की ओर उद्दिष्ट ध्रुवाङ्क के शिर पर जो ध्रुवाङ्क है वहां तक गिनती करो कि कौन संख्या है यदि विषम हो तो अभीष्ट लघु कनिष्ठफल ऋण और सम हो तो धन समझना चाहिए। जैसे ऊपर के उदाहरण में $अ_१$ से गिनती करने में जिस ऊर्ध्वाधर पङ्क्ति में $ग_३$ है वहां तक $अ_१, क_१, ख_१, ग_१$ चार संख्या हुईं फिर चार के आगे अभीष्ट ध्रुवाङ्क के शिर पर के ध्रुवाङ्क $ग_२$ तक गिनती पांच हुई अर्थात् $अ_१, क_१, ख_१, ग_१, ग_२$ ये पांच हुए; इसलिये संख्या विषम होने से उद्दिष्ट लघु कनिष्ठफल ऋण हुआ।

उदाहरण

(१) सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} अ_१ & क_१ & ख_१ \\ अ_२ & क_२ & ख_२ \\ अ_३ & क_३ & ख_३ \end{vmatrix} = अ_१ \begin{vmatrix} क_२ & ख_२ \\ क_३ & ख_३ \end{vmatrix} - अ_२ \begin{vmatrix} क_१ & ख_१ \\ क_३ & ख_३ \end{vmatrix} + अ_३ \begin{vmatrix} क_१ & ख_१ \\ क_२ & ख_२ \end{vmatrix}$$

$$= अ_१क_२ख_३ - अ_१क_३ख_२ - अ_२क_१ख_३ + अ_२क_३ख_१ + अ_३क_१ख_२ - अ_३क_२ख_१$$

(१७६ प्रक्रम का (२) समीकरण देखो)

(२) दिखलाओ कि

$$\begin{vmatrix} अ & ह & क \\ ह & क & फ \\ ग & फ & ख \end{vmatrix} = अ \begin{vmatrix} क & फ \\ फ & ख \end{vmatrix} - ह \begin{vmatrix} ह & ग \\ फ & ख \end{vmatrix} + ग \begin{vmatrix} ह & ग \\ क & फ \end{vmatrix}$$

$$= अकख + २फगह - अफ^२ - कग^२ - खह^२$$

(३) चतुर्थ पंक्ति में जो ध्रुवाङ्क हैं उनके वश से चार चार अक्षर के वश से जो कनिष्ठफल हो उसे सिद्ध करो कि

$$\text{कफ} = -\text{अ}_4 \begin{vmatrix} \text{क}_1 & \text{ख}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{क}_2 & \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{क}_3 & \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix} + \text{क}_4 \begin{vmatrix} \text{अ}_1 & \text{ख}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{अ}_2 & \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{अ}_3 & \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix} - \text{ख}_4 \begin{vmatrix} \text{अ}_1 & \text{क}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{अ}_2 & \text{क}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{अ}_3 & \text{क}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix}$$

$$+ \text{ग}_4 \begin{vmatrix} \text{अ}_1 & \text{क}_1 & \text{ख}_1 \\ \text{अ}_2 & \text{क}_2 & \text{ख}_2 \\ \text{अ}_3 & \text{क}_3 & \text{ख}_3 \end{vmatrix}$$

$$= -\text{अ}_4 \, \text{कफ}_{\text{अ}_4} + \text{क}_4 \text{कफ}_{\text{क}_4} - \text{ख}_4 \text{कफ}_{\text{ख}_4} + \text{ग}_4 \, \text{कफ}_{\text{ग}_4}$$

(४) सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} ४ & ३ & ५ \\ ८ & ७ & २ \\ ६ & ४ & ९ \end{vmatrix} \equiv ४ \begin{vmatrix} ७ & २ \\ ४ & ९ \end{vmatrix} - ८ \begin{vmatrix} ३ & ५ \\ ४ & ९ \end{vmatrix} + ६ \begin{vmatrix} ३ & ५ \\ ७ & २ \end{vmatrix}$$

$$= ४(६३ - ८) - ८(२७ - २०) + ६(६ - ३५)$$

$$= ४ \times ५५ - ८ \times ७ - ६ \times २९ = २२० - ५६ - १७४$$

$$= २२० - २३०$$

$$= -१० \text{।}$$

(५) नीचे लिखे हुए कनिष्ठफल का मान बताओ।

$$\begin{vmatrix} ८ & ७ & २ & २० \\ ३ & १ & ४ & ७ \\ १० & ० & २२ & ० \\ ८ & १ & ० & ६ \end{vmatrix}$$

इसे तीसरी पंक्ति के वश से फैलाने में सुभीता पड़ेगा क्योंकि उसमें दो शून्य ध्रुवाङ्क हैं; इसलिये

$$कफ = १० \begin{vmatrix} ७ & २ & २० \\ १ & ४ & ७ \\ १ & ० & ६ \end{vmatrix} + २२ \begin{vmatrix} ८ & ७ & २० \\ ३ & १ & ७ \\ ८ & १ & ६ \end{vmatrix}$$

इन दोनों कनिष्ठफल के फैलाने से कक = ४३७६ ।

६ । फैला कर दिखलाओ कि

$$\begin{vmatrix} ० & ख & क & ग \\ ख & ० & अ & घ \\ क & अ & ० & फ \\ ग & घ & फ & ० \end{vmatrix} = १अ^२ग^२ + क^२घ^२ + ख^२फ^२ - २कखघफ - २खअफघ - २अकगघ$$

(७) सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} १ & अ & क & ख \\ -अ & १ & ख' & -क' \\ -क & -ख' & १ & अ' \\ -ख & क' & -अ' & १ \end{vmatrix} = १ + अ^२ + क^२ + ख^२ + अ'^२ + क'^२ + ख'^२ + (अअ' + कक' + खख')^२$$

८ । फैलाकर दिखाओ कि

$$\begin{vmatrix} -अ & क & ख & ग \\ क & -अ & ग & ख \\ ख & ग & -अ & क \\ ग & ख & क & -अ \end{vmatrix}$$

$$= अ^४ + क^४ + ख^४ + ग^४ - २क^२ख^२ - २ख^२अ^२ - २अ^२क^२ - २अ^२ग^२ - २क^२ग^२ - २ख^२ग^२ - ८अकखग$$

९ । फैला कर दिखलाओ और सरूप समीकरण को भी सिद्ध करो कि

$$य^४ + र^४ + ल^४ - २र^२ल^२ - २य^२ल^२ - २य^२र^२ = \begin{vmatrix} ० & १ & १ & १ \\ १ & ० & ल^२ & र^२ \\ १ & ल^२ & ० & य^२ \\ १ & र^२ & य^२ & ० \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ० & य & र & ल \\ य & ० & ल & र \\ र & ल & ० & य \\ य & र & ल & ० \end{vmatrix}$$

पहिले की ऊपर वाली तिर्यक् पंक्ति के ध्रुवों को यरल से गुण दो औरों को क्रम से य,र,ल, से गुण दो। फिर दूसरी, तीसरी और चौथी ऊर्ध्वाधर पंक्तिओं के ध्रुवों को क्रम से रल, यल, और यर से अपवर्त्तन दे दो तो दूसरा रूप बन जायगा।

१०। सिद्ध करो कि

$$-\begin{vmatrix} \text{अ} & \text{ह} & \text{ग} & \text{र} \\ \text{ह} & \text{क} & \text{फ} & \text{म} \\ \text{ग} & \text{फ} & \text{ख} & \text{न} \\ \text{र} & \text{म} & \text{न} & ० \end{vmatrix} = (\text{कख} - \text{फ}^{२})\text{र}^{२} + (\text{खअ} - \text{ग}^{२})\text{म}^{२} + (\text{अक} - \text{ह}^{२})\text{न}^{२}$$
$$+ २(\text{गह} - \text{अफ})\text{मन} + २(\text{हफ} - \text{कग})\text{रन}$$
$$+ २(\text{फग} - \text{खह})\text{रम}$$

१८७—यदि

$$\begin{vmatrix} \text{अ}_{१} & \text{क}_{१} \\ \text{अ}_{२} & \text{क}_{२} \end{vmatrix} = (\text{अ}_{१}\ \text{क}_{२}), \begin{vmatrix} \text{अ}_{१} & \text{क}_{१} & \text{ख}_{१} \\ \text{अ}_{२} & \text{क}_{२} & \text{ख}_{२} \\ \text{अ}_{३} & \text{क}_{३} & \text{ख}_{३} \end{vmatrix} = (\text{अ}_{१}\ \text{क}_{२}\ \text{ख}_{३})$$

इत्यादि कल्पना करो तो लाप्लेस (Laplace) ने किसी कनिष्ठ फल को लघु कनिष्ठ फलों के घातों के योग रूप में ले आने के लिये साधारण युक्ति दिखलाई है जिसके अन्तर्गत ऊपर के प्रक्रम की युक्ति है।

कल्पना करो कि किसी कनिष्ठफल में ऊर्ध्वाधर दो पंक्तिओं ($\text{अ}_{१}$, $\text{क}_{१}$) के ध्रुवांकों के वश किसी दो तिर्यक् पङ्क्तिओं के वश से जो कनिष्ठफल उत्पन्न होता है वह ($\text{अ}_{प}\text{क}_{ब}$) यह है और इसका पूरक $\text{कफ}_{प,ब}$ लघुकनिष्ठफल और इसका पूरक ($\text{अ}_{प}\text{क}_{ब}$) है तो पहिला कनिष्ठफल $= \text{यौ} \pm (\text{अ}_{प}\text{क}_{ब})\, \text{कफ}_{प,ब}$ यह होगा। क्योंकि कनिष्ठफल के प्रत्येक पद में एक ध्रुव $\text{अ}_{१}$, ऊर्ध्वाधर और एक ध्रुव $\text{क}_{१}$ ऊर्ध्वाधर पंक्ति का रहेगा। मान लो कि एक पद में $\text{अ}_{प}\text{क}_{ब}$ गुणक है तो एक दूसरा पद अवश्य

प और व के बदलने से ऐसा होगा जिसका गुणक $अ_{व}क_{प}$ होगा। इसलिये कनिष्ठफल को यौ $(अ_{प}क_{व})$ $आ_{प,व}$ इस रूप में फैला सकते हैं, जहां $आ_{प,व}$ यह उन सब पदों का योग है जो कि ख, ग, घ इत्यादि के आगे न−२ संख्याओं से जो अङ्कराश से भेद होंगे वे लगे रहेंगे। ± $कफ_{प,व}$ इसका चिन्ह १८० प्रक्रम से विदित हो जायगा। इसी प्रकार तीन, चार इत्यादि ऊर्ध्वाधर पंक्तिओं के ध्रुवाङ्कों के वश किसी तीन, चार इत्यादि तिर्यक् पंक्तिओं के वश से जो कनिष्ठफल होंगे इनके और उनके पूरक लघु कनिष्ठफलों के गुणनफलों के योग रूप में किसी कनिष्ठफल को प्रकाश कर सकते हैं। जैसे

उदाहरण—(१) $(अ_{१}क_{२}ख_{३}ग_{४})$ इसका मान पहिली दो ऊर्ध्वाधर पंक्ति के वश जो लघु कनिष्ठफल बनेंगे उनके रूप में लाओ। यहां ऊपर की युक्ति से

$$कफ = (अ_{१}क_{२})(ख_{३}ग_{४}) - (अ_{१}क_{३})(ख_{२}द_{४}) + (अ_{१}क_{४})(ख_{२}ग_{३})$$
$$+ (अ_{२}क_{३})(ख_{१}ग_{४}) - (अ_{२}क_{४})(ख_{१}ग_{३}) + (अ_{३}क_{४})(ख_{१}ग_{२})$$

चिन्ह जानने के लिये दो तिर्यक् पंक्तिओं को चला कर क्रम से पहिली और दूसरी तिर्यक् पंक्ति पर पहुँचाओ और हटाए स्थानों का योग विषम हो तो ऋण और सम हो तो धन समझो। जैसे $(अ_{१}क_{३})$ में $अ_{१}$ बिना हटाए पहिली पंक्ति में है और $क_{३}$ एक स्थान हटाने से दूसरी तिर्यक् पंक्ति पर पहुँचती है; इसलिये हटे स्थानों का योग १ विषम होने से वह पद ऋण हुआ। इसी प्रकार $(अ_{२}क_{३})(ख_{१}ग_{४})$ इस पद में $अ_{२}$ को और $अ_{३}$ को एक एक बेर हटाने से ये क्रम से पहिली और दूसरी पंक्ति पर पहुँचते हैं; इसलिये हटे स्थानों का योग २ सम होने

से पद धन हुआ। और $(अ_{२}क_{४})$ $(ख_{१}ग_{३})$ इसमें $अ_{२}$ को एक बेर और $क_{४}$ को दो बेर हटाने से क्रम से ये पहिली और दूसरी पंक्ति पर पहुँचते हैं, इसलिये हटे स्थानों का योग ३ विषम होने से पद ऋण हुआ। इस प्रकार सर्वत्र चिन्ह का ज्ञान कर लेना चाहिए।

२। $(अ_{१}क_{२}ख_{३}ग_{४}घ_{५})$

$$
\begin{aligned}
&=(अ_{१}क_{२})\,(ख_{३}ग_{४}घ_{५})-(अ_{१}क_{३})\,(ख_{२}ग_{४}घ_{५})\\
&+(अ_{१}क_{४})\,(ख_{२}ग_{३}घ_{५})-(अ_{१}क_{५})\,(ख_{२}ग_{३}घ_{४})\\
&+(अ_{२}क_{३})\,(ख_{१}ग_{४}घ_{५})-(अ_{२}क_{४})\,(ख_{१}ग_{३}घ_{५})\\
&+(अ_{२}क_{५})\,(ख_{१}ग_{३}घ_{४})+(अ_{३}क_{४})\,(ख_{१}ग_{२}घ_{५})\\
&-(अ_{३}अ_{५})\,(ख_{१}ग_{२}घ_{४})+(अ_{४}क_{५})\,(ख_{१}ग_{२}घ_{३})
\end{aligned}
$$

३। सिद्ध करो कि

$$
\begin{vmatrix}
अ_{१} & क_{१} & ख_{१} & ग_{१} & घ_{१} & ङ_{१}\\
अ_{२} & क_{२} & ख_{२} & ग_{२} & घ_{२} & ङ_{२}\\
अ_{३} & क_{३} & ख_{३} & ग_{३} & घ_{३} & ङ_{३}\\
० & ० & ० & आ_{१} & का_{१} & खा_{१}\\
० & ० & ० & आ_{२} & का_{२} & खा_{२}\\
० & ० & ० & आ_{३} & का_{३} & खा_{३}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
अ_{१} & क_{१} & ख_{१}\\
अ_{२} & क_{२} & ख_{२}\\
अ_{३} & क_{३} & ख_{३}
\end{vmatrix}
\begin{vmatrix}
आ_{१} & का_{१} & खा_{१}\\
आ_{२} & का_{२} & खा_{२}\\
आ_{३} & का_{३} & खा_{३}
\end{vmatrix}
$$

पहिली ऊर्ध्वाधर तीन पंक्तिओं को लेकर यदि लासेस (Laplace) की युक्ति से कनिष्ठफल का रूप फैलाओ तो स्पष्ट है कि जिस पद का गुणक $(अ_{१}क_{२}ख_{३})$ यह है उसे छोड़ सब पद शून्य होंगे। और $(अ_{१}क_{२}ख_{३})$ इसका गुणक $(आ_{१}का_{२}खा_{३})$ यही होगा। इस प्रकार साधारण से जहां पंक्ति में २म अक्षर हों और म अक्षरों के शून्य हो जाने से $म^{२}$ कोष्ठ में शून्य हों तो

म अक्षर की पंक्ति से जो दो कनिष्ठफल होंगे उनके गुणनफल के तुल्य पहिला कनिष्ठफल होगा।

४। सिद्ध करो कि

अ आ^{२} + क का^{२} + ख खा^{२} + २फ का र + २ग र आ + २ह आ का

$$= \begin{vmatrix} अ & ह & ग & र & र' \\ ह & क & फ & म & म' \\ ग & फ & ख & न & न' \\ र & म & न & ० & ० \\ र' & म' & न' & ० & ० \end{vmatrix}$$ जहां
आ = मन$'$ − म$'$न,
का = नर$'$ − न$'$र,
खा = रम$'$ − र$'$म।

५। जहाँ प्रत्येक पंक्ति में न अक्षर हैं वहाँ पहिली त ऊर्ध्वाधर पंक्तिओं के ध्रुवाङ्कों के वश त,त तिर्यक् पंक्तिओं के कनिष्ठफलों के रूप में मुख्य कनिष्ठफल बनाया जायगा उसमें कितने पद होंगे।

न में से त,त लेकर लघु कनिष्ठफल बनाने से उनकी संख्या

$\frac{न(न-१)(न-२)\cdots\cdots(न-त+१)}{त\,!}$ इन प्रत्येक लघु कनिष्ठफल में पदों की संख्या त ! होगी; इसलिये इनमें सब पद = न (न − १) (न − २)······(न − त + १) और प्रत्येक के पूरक लघु कनिष्ठफल में पद संख्या = (न − त) ! इससे ऊपर की सब पद की संख्या को गुण देने से

मुख्य कनिष्ठफल में पदों की संख्या

= न (न − १) (न − २)······(न − त + १) (न − त)······१

= न !

यही न अक्षरों की पंक्ति से भी सिद्ध हो जाता है।

१८८—प्रधान ध्रुवाओं के रूप में कनिष्ठफल के ले आने के लिये चार अक्षर की पंक्ति के कनिष्ठफल को अर्थात्

$$\text{कफ} = \begin{vmatrix} \text{आ} & \text{क}_{१} & \text{ख}_{१} & \text{ग}_{१} \\ \text{अ}_{२} & \text{का} & \text{ख}_{२} & \text{ग}_{२} \\ \text{अ}_{३} & \text{क}_{३} & \text{खा} & \text{ग}_{३} \\ \text{अ}_{४} & \text{क}_{४} & \text{ख}_{४} & \text{गा} \end{vmatrix}$$

इसे, जहां $\text{अ}_{१}$, $\text{क}_{२}$, $\text{ख}_{३}$, $\text{ग}_{४}$ इनके स्थान में आ, का, खा, गा हैं, आ, का, खा और इसके परस्पर दो दो इत्यादि के घात के रूप में ले आना हो तो ऊपर के प्रक्रमों की युक्ति से

$$\text{कफ} = \text{कफ}_{०} + \text{यौ र आ} + \text{यौ} r'\text{आ का} + \text{आ का खा गा}\text{ ।}$$

जहां जितने पदों में प्रधान ध्रुव नहीं हैं उनके योग के स्थान में $\text{कफ}_{०}$ है और जितने पदों में एक एक प्रधान ध्रुव हैं उनके योग के स्थान में यौ र आ, जितने पदों में दो दो प्रधान ध्रुव हैं उनके योग के स्थान में यौ र' आ का है। तीन तीन प्रधान ध्रुव नहीं आ सकते क्योंकि जहां $\text{अ}_{१}\text{क}_{२}\text{ख}_{३}$ होगा वहां चौथा $\text{ग}_{४}$ भी रहेगा; इसलिये एक स्थान में केवल प्रधान ध्रुवों के घात रहेंगे जो कि अन्त पद में आ का खा गा है। अब $\text{कफ}_{०}$ इसका और र, र' इत्यादि गुणक के जानने के लिये पहिले मान लो कि आ, का, खा, गा चारो शून्य के तुल्य हैं तो

$$\text{कफ}_{०} = \begin{vmatrix} ० & \text{क}_{१} & \text{ख}_{१} & \text{ग}_{१} \\ \text{अ}_{२} & ० & \text{ख}_{२} & \text{ग}_{२} \\ \text{अ}_{३} & \text{क}_{३} & १ & \text{ग}_{३} \\ \text{अ}_{४} & \text{क}_{४} & \text{ख}_{४} & ० \end{vmatrix}$$

क्योंकि इसमें प्रधान ध्रुव के कोई पद न रहेंगे।

फिर आ के गुणक र के लिये का, खा, गा तीनों को शून्य मानो तो लघु कनिष्ठफल की युक्ति से गुणक

$$\begin{vmatrix} ० & \text{ख}_{२} & \text{ग}_{२} \\ \text{क}_{३} & ० & \text{ग}_{३} \\ \text{क}_{४} & \text{ख}_{४} & ० \end{vmatrix} \text{ यह होगा।}$$

इसी प्रकार का का गुणक आ, खा, गा के शून्य मानने से ज्ञात होगा और इसी प्रकार खा और गा के भी गुणक आ जायँगे। र′ के लिये खा और गा को शून्य मानो तो आ का का गुणक र′

$$\begin{vmatrix} ० & \text{ग}_{३} \\ \text{ख}_{४} & ० \end{vmatrix}$$

इसी प्रकार आ खा, इत्यादि गुणक भी आ जायँगे। तब

$$\text{कफ} = \begin{vmatrix} ० & \text{क}_{१} & \text{ख}_{१} & \text{ग}_{१} \\ \text{अ}_{२} & ० & \text{ख}_{२} & \text{ग}_{२} \\ \text{अ}_{३} & \text{क}_{३} & ० & \text{ग}_{३} \\ \text{अ}_{४} & \text{क}_{४} & \text{ख}_{४} & ० \end{vmatrix}$$

$$+ \text{आ}\begin{vmatrix} ० & \text{ख}_{२} & \text{ग}_{२} \\ \text{क}_{३} & ० & \text{ग}_{३} \\ \text{क}_{४} & \text{ख}_{४} & ० \end{vmatrix} + \text{का}\begin{vmatrix} ० & \text{ख}_{१} & \text{ग}_{१} \\ \text{अ}_{३} & ० & \text{ग}_{३} \\ \text{अ}_{४} & \text{ख}_{४} & ० \end{vmatrix} + \text{खा}\begin{vmatrix} ० & \text{क}_{१} & \text{ग}_{१} \\ \text{अ}_{२} & ० & \text{ग}_{२} \\ \text{अ}_{४} & \text{क}_{४} & ० \end{vmatrix}$$

$$+ \text{गा}\begin{vmatrix} ० & \text{क}_{१} & \text{ख}_{१} \\ \text{अ}_{२} & ० & \text{ख}_{२} \\ \text{अ}_{३} & \text{क}_{३} & ० \end{vmatrix}$$

$$+ \text{आका}\begin{vmatrix} ० & \text{ग}_{३} \\ \text{ख}_{४} & ० \end{vmatrix} + \text{आ खा}\begin{vmatrix} ० & \text{ग}_{३} \\ \text{क}_{४} & ० \end{vmatrix} + \text{आगा}\begin{vmatrix} ० & \text{ख}_{२} \\ \text{क}_{३} & ० \end{vmatrix}$$

$$+ \text{काखा}\begin{vmatrix} ० & \text{ग}_{१} \\ \text{अ}_{४} & ० \end{vmatrix} + \text{का गा}\begin{vmatrix} ० & \text{ख}_{१} \\ \text{अ}_{३} & ० \end{vmatrix} + \text{खा गा}\begin{vmatrix} ० & \text{क}_{१} \\ \text{अ}_{२} & ० \end{vmatrix} + \text{आकाखागा}$$

जिस कनिष्ठफल में प्रधान ध्रुव शून्य होते हैं उस कनिष्ठफल को अप्रधान ध्रुवक वा निरक्ष कहते हैं। इस प्रकार से यहां जितने आ, का,……इत्यादि के गुणक हैं सब निरक्ष कनिष्ठफल हैं।

१८९—यदि कनिष्ठफल का रूप एक तिर्यक् और एक ऊर्ध्वाधर पंक्तिस्थ ध्रुवों में दो दो लेकर उनके गुणन के रूप में फैलाना हो तो केवल प्रथम ऊर्ध्वाधर और प्रथम तिर्यक् पंक्ति के वश से क्रिया दिखला देने से सर्वत्र काम चल जायगा क्योंकि किसी ऊर्ध्वाधर और किसी तिर्यक् पंक्ति को हटा कर प्रथम ऊर्ध्वाधर और प्रथम तिर्यक् पंक्ति के स्थान में ला सकते हो।

सुभीते के लिये कनिष्ठफल के रूप में प्रथम ऊर्ध्वाधर और प्रथम तिर्यक्पंक्तिस्थ ध्रुवों को दूसरे प्रकार के अक्षरों में लिखने से

$$\begin{vmatrix} \text{अ}_0 & \text{अ} & \text{क} & \text{ख} & \cdots \\ \text{अ}' & \text{अ}_1 & \text{क}_1 & \text{ख}_1 & \cdots \\ \text{क}' & \text{अ}_2 & \text{क}_2 & \text{ख}_2 & \cdots \\ \text{ख}' & \text{अ}_3 & \text{क}_3 & \text{ख}_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

ऐसा हुआ। इसे कफ′ कहो और अ_0 सम्बन्धि प्रधान प्रथम लघु कनिष्ठफल को कफ कहो तो कफ′ फैलाने से जितने पदों में अ_0 गुणक होगा वे अ_0 क फ इसके अन्तर्गत हैं। अब जितने पदों में प्रथम ऊर्ध्वाधर और तिर्यक् पंक्ति के एक एक ध्रुवों के गुणनफल गुणक होंगे उनके गुण्यों के जानने के लिये मान लो कि अ अ′ गुणक का गुण्य जानना है। १८६ प्रक्रम से कल्पना करो कि कफ को फैलाने से

अ$_{१}$, क$_{१}$, ख$_{१}$,.........अ$_{२}$, क$_{२}$,.........के गुणक

आ$_{१}$, का$_{१}$, खा$_{१}$,.........का$_{२}$, खा$_{२}$,.........हैं। तो स्पष्ट है कि कफ$'$ के विस्तृत रूप में अअ$'$ गुणक का जो गुण्य होगा वही कफ के विस्तृत रूप में अ$_{१}$अ$_{१}$ का गुण्य विपरीत चिन्ह का होगा। इसी प्रकार अ$'$क गुणक का गुण्य, अ$_{०}$क$_{१}$ गुणक के विपरीत चिन्ह गुण्य $-$का$_{१}$ होगा। इसी प्रकार आगे भी जानना चाहिए। इस पर से यह सहज युक्ति उत्पन्न होती है कि प्रधान ध्रुव अ$_{०}$ और जिन दो ध्रुवों के गुणनफल का गुणक जानना हो उन दोनों को लेने से देखो कि चौथा ध्रुव कौन है जिसके लेने से चतुर्भुज पूरा हो जाता है तो इसी चौथे ध्रुव का जो गुणक आ$_{१}$,का$_{१}$,खा$_{१}$ ......में से हो उसी को विपरीत चिन्ह करने से उन दोनों के गुणनफल का गुणक होगा। जैसे खक$'$ के गुणक को जानना है तो अ$_{०}$, ख, क$'$ इन्हें चतुर्भुज के तीन कोनों पर मानने से ख$_{२}$ को लेने से चतुर्भुज पूरा हो जाता है; इसलिये ख$_{२}$ के गुणक को विपरीत चिन्ह का करने से $-$खा$_{२}$ यह खक$'$ का गुणक होगा। इस प्रकार

कफ$'$=अ$_{०}$कफ $-$ आ$_{१}$अअ$'$ $-$ का$_{१}$कअ$'$ $-$ खा$_{१}$खअ$'$ $-$ ....

$-$ आ$_{२}$अक$'$ $-$ का$_{२}$कक$'$ $-$ खा$_{२}$खक$'$ $-$ ....

$-$ आ$_{३}$अख$'$ $-$ का$_{३}$कख$'$ $-$ खा$_{३}$खख$'$ $-$ ....

इत्यादि—

१९०—कनिष्ठफलों का सङ्कलन।

किसी पंक्ति के प्रत्येक ध्रुवक यदि दो संख्याओं के योग रूप में पृथक् पृथक् किए जायँ तो पहिला कनिष्ठफल दो अन्य कनिष्ठफलों के योग रूप में हो सकता है।

कल्पना करो कि पहिली ऊर्ध्वाधर पंक्ति के ध्रुवक

$\text{अ}_1 + \text{अ}'_1, \text{अ}_2 + \text{अ}'_2, \text{अ}_3 + \text{अ}'_3, \cdots\cdots$

इस रूप के हैं तो १८६ प्र० से

$$\text{क}\,\text{फ} = (\text{अ}_1 + \text{अ}'_1)\,\text{आ}_1 + (\text{अ}_2 + \text{अ}'_2)\,\text{आ}_2 + (\text{अ}_3 + \text{अ}'_3)\,\text{आ}_3 + \cdots\cdots$$

$$= \text{अ}_1\text{आ}_1 + \text{अ}_2\text{आ}_2 + \text{अ}_3\text{आ}_3 + \cdots\cdots + \text{अ}'_1\text{आ}_1 + \text{अ}'_2\text{आ}_2 + \text{अ}'_3\text{आ}_3 + \cdots\cdots$$

वा

$$\begin{vmatrix} \text{अ}_1 + \text{अ}'_1 & \text{क}_1 & \text{ख}_1 \cdots \\ \text{अ}_2 + \text{अ}'_2 & \text{क}_2 & \text{ख}_2 \cdots \\ \text{अ}_3 + \text{अ}'_3 & \text{क}_3 & \text{ख}_3 \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{अ}_1 & \text{क}_1 & \text{ख}_1 \cdots \\ \text{अ}_2 & \text{क}_2 & \text{ख}_2 \cdots \\ \text{अ}_3 & \text{क}_3 & \text{ख}_2 \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{अ}'_1 & \text{क}_1 & \text{ख}_1 \cdots \\ \text{अ}'_2 & \text{क}_2 & \text{ख}_2 \cdots \\ \text{अ}'_3 & \text{क}_3 & \text{ख}_3 \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

इस पर से ऊपर का सिद्धान्त सिद्ध होता है।

यदि दूसरी ऊर्ध्वाधर पंक्ति में भी दो संख्याओं के योग हों तो ऊपर ही की युक्ति से पहिले प्रथम ऊर्ध्वाधर पंक्ति के वश दो कनिष्ठफल के योग रूप में वास्तव कनिष्ठफल को ले आओ फिर दूसरी ऊर्ध्वाधर पंक्ति के वश से प्रत्येक कनिष्ठफल के योग रूप में ले आओ। इस प्रकार, वास्तव कनिष्ठफल चार कनिष्ठफलों के योग रूप में आवेगा।

जैसे

$$\begin{vmatrix} \text{अ}_1 + \text{अ}'_1 & \text{क}_1 + \text{क}'_1 & \text{ख}_1 \\ \text{अ}_2 + \text{अ}'_2 & \text{क}_2 + \text{क}'_2 & \text{ख}_2 \\ \text{अ}_3 + \text{अ}'_3 & \text{क}_3 + \text{क}'_3 & \text{ख}_3 \end{vmatrix}$$

यह १८७वें प्रक्रम के संकेत से

$(अ_1 क_2 ख_3) + (अ'_1 क_2 ख_3) + (अ_1 क'_2 ख_3) + (अ'_1 क'_2 ख_3)$
इसके तुल्य होगा।

इसी प्रकार

$$\begin{vmatrix} अ_1 - अ'_1 + अ''_1 & क_1 & ख_1 \\ अ_2 - अ'_2 + अ''_2 & क_2 & ख_2 \\ अ_3 - अ'_3 + अ''_3 & क_3 & ख_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} अ_1 & क_1 & ख_1 \\ अ_2 & क_2 & ख_2 \\ अ_3 & क_3 & ख_3 \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} अ'_1 & क_1 & ख_1 \\ अ'_2 & क_2 & ख_2 \\ अ'_3 & क_3 & ख_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} अ''_1 & क_1 & ख_1 \\ अ''_2 & क_2 & ख_2 \\ क''_3 & क_3 & ख_3 \end{vmatrix}$$

यदि प्रथम ऊर्ध्वाधर पंक्ति में म खण्ड, दूसरे में न खण्ड, तीसरे में प खण्ड हों तो कनिष्ठफल म·न·प·तुल्य अन्य कनिष्ठ-फलों के योग रूप में होगा।

यदि तिर्यक् पंक्ति में ध्रुवों के कई खण्ड हों तो तिर्यक् पंक्तिओं को ऊर्ध्वाधर और ऊर्ध्वाधर पंक्तिओं को तिर्यक् पंक्तिओं में रखकर ऊपर की युक्ति से कनिष्ठफल को अन्य कनिष्ठफलों के योग रूप में बना सकते हो।

१९१—यदि एक पंक्तिस्थ ध्रुवक क्रम से स्थिर संख्या गुणित सजातीय पंक्तिस्थ ध्रुवों के योग्य तुल्य हों तो कनिष्ठफल शून्य के तुल्य होगा।

जैसे

$$\begin{vmatrix} मअ_1 + नक_1 & अ_1 & क_1 \\ मअ_2 + नक_2 & अ_2 & क_2 \\ मअ_3 + नक_3 & अ_3 & क_3 \end{vmatrix} = म \begin{vmatrix} अ_1 & अ_1 & क_1 \\ अ_2 & अ_2 & क_2 \\ अ_3 & अ_3 & क_3 \end{vmatrix} + न \begin{vmatrix} क_1 & अ_1 & क_1 \\ क_2 & अ_2 & क_2 \\ क_3 & अ_3 & क_3 \end{vmatrix}$$

यहां दहिने पक्ष के दोनों कनिष्ठफल १८२ वें प्रक्रम से शून्य होंगे।

१९२—एक पंक्तिस्थ ध्रुवों में क्रम से स्थिर संख्या गुणित सजातीय पंक्तिस्थ ध्रुवों को जोड़ कर उस पंक्ति के ध्रुव बनाए जायँ तो कनिष्ठफल में भेद नहीं पड़ता।

क्योंकि

$$\begin{vmatrix} अ_1 & क_1 & ख_1 \\ अ_2 & क_2 & ख_2 \\ अ_3 & क_3 & ख_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} अ_1 + मक_1 + नख_1 & क_1 & ख_1 \\ अ_2 + मक_2 + नख_2 & क_2 & ख_2 \\ अ_3 + मक_3 + नख_3 & क_3 & ख_3 \end{vmatrix}$$

इसमें दहिना पक्ष तीन कनिष्ठफलों के योग तुल्य होगा, जिनमें पहिला बायें पक्ष के समान और दो १९१ प्रक्रम से शून्य के तुल्य होंगे।

उदाहरण—(१) सिद्ध करो कि।

$$\begin{vmatrix} क+ख & अ & १ \\ ख+अ & क & १ \\ अ+क & ख & १ \end{vmatrix} = ०$$

द्वितीय ऊर्ध्वाधर ध्रुवकों को पहिले ऊर्ध्वाधर ध्रुवकों में जोड़ देने से फिर अ+क+ख समान गुणक निकाल लेने से पहिले ऊर्ध्वाधर और तीसरे ऊर्ध्वाधर में एक ही ध्रुवक होंगे; इसलिये कनिष्ठफल शून्य होगा।

(२) सिद्ध करो कि।

$$\begin{vmatrix} १ & २ & ४ \\ २ & ३ & ७ \\ ३ & ४ & १ \end{vmatrix}$$ इसका मान बताओ।

पहिले ऊर्ध्वाधर के एक गुणित ध्रुवक दूसरे ऊर्ध्वाधर ध्रुवकों में और त्रिगुणित तीसरे ऊर्ध्वाधर ध्रुवकों में घटा देने से द्वितीय और तृतीय ऊर्ध्वाधर के ध्रुवक समान होते हैं। इसलिये मान शून्य होगा

(३) सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} -१ & १ & १ & १ \\ १ & -१ & १ & १ \\ १ & १ & -१ & १ \\ १ & १ & १ & -१ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -१ & १ & १ & १ \\ ० & ० & २ & २ \\ ० & २ & ० & २ \\ ० & २ & २ & ० \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} ० & २ & २ \\ २ & ० & २ \\ २ & २ & ० \end{vmatrix} = -१६$$

(४) सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} ७ & ११ & ४ \\ १३ & १५ & १० \\ ६ & १८ & १२ \end{vmatrix} = ६\begin{vmatrix} ७ & ११ & ४ \\ १३ & १५ & १० \\ १ & ३ & २ \end{vmatrix} = ६\begin{vmatrix} ७ & -१० & -१० \\ १३ & -२४ & -१६ \\ १ & १ & ० \end{vmatrix} =$$

$$६\begin{vmatrix} १० & १० \\ २४ & १६ \end{vmatrix}$$

$$= ६०(१६-२४) = -४८० ।$$

(५) सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} ७ & -२ & ० & ५ \\ -२ & ६ & -२ & २ \\ ० & -२ & ५ & ३ \\ ५ & २ & ३ & ४ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ७ & -२ & ० & ५ \\ १९ & ० & -२ & १७ \\ -७ & ० & ५ & -२ \\ १२ & ० & ३ & ९ \end{vmatrix}$$

$$= २\begin{vmatrix} १९ & -३ & १७ \\ -७ & ५ & -२ \\ १२ & ३ & ९ \end{vmatrix} = २\begin{vmatrix} २७ & -२ & २३ \\ -२७ & ५ & -१७ \\ ० & ३ & ० \end{vmatrix}$$

$$= -६\begin{vmatrix} २७ & २३ \\ -२७ & -१७ \end{vmatrix} = -९७२ ।$$

(६) सिद्ध करो कि

$$कफ = \begin{vmatrix} १ & १५ & १४ & ४ \\ १२ & ६ & ७ & ९ \\ ८ & १० & ११ & ५ \\ १३ & ३ & २ & १६ \end{vmatrix}$$

इस चौंतीसे यन्त्र में पहिली ऊर्ध्वाधर पंक्तिस्थ ध्रुवकों में और ऊर्ध्वाधर पंक्तिस्थ ध्रुवकों को जोड़ देने से

$$कफ = ३४ \begin{vmatrix} १ & १५ & १४ & ४ \\ १ & ६ & ७ & ९ \\ १ & १० & ११ & ५ \\ १ & ३ & २ & १६ \end{vmatrix} = ३४ \begin{vmatrix} ० & १२ & १२ & -१२ \\ ० & ३ & ५ & -७ \\ ० & ७ & ९ & -११ \\ १ & ३ & २ & १६ \end{vmatrix}$$

$$= -३४ \times १२ \begin{vmatrix} १ & ३ & २ & १६ \\ ० & १ & १ & -१ \\ ० & ३ & ५ & -७ \\ ० & ७ & ९ & -११ \end{vmatrix} = -३४ \times १२ \begin{vmatrix} १ & १ & -१ \\ ३ & ५ & -७ \\ ७ & ९ & -११ \end{vmatrix}$$

$$= -३४ \times १२ \begin{vmatrix} १ & १ & -१ \\ ३ & ५ & -७ \\ ४ & ४ & -४ \end{vmatrix} = -३४ \times १२ \times ४ \begin{vmatrix} १ & १ & -१ \\ ३ & ५ & -७ \\ १ & १ & -१ \end{vmatrix} = ०$$

७। सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} ४ & ९ & २ \\ ३ & ५ & ७ \\ ८ & १ & ६ \end{vmatrix} = १५ \begin{vmatrix} १ & ९ & २ \\ १ & ५ & ७ \\ १ & १ & ६ \end{vmatrix} = १५ \begin{vmatrix} ० & ८ & -४ \\ ० & ४ & १ \\ १ & १ & ६ \end{vmatrix} = १५ \begin{vmatrix} १ & १ & ६ \\ ० & ८ & -४ \\ ० & ४ & १ \end{vmatrix}$$

$$= १५ \begin{vmatrix} ८ & -४ \\ ४ & १ \end{vmatrix} = ३६०।$$

८। सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} १० & १८ & १ & १४ & २२ \\ ४ & १२ & २५ & ८ & १६ \\ २३ & ६ & १९ & २ & १५ \\ १७ & ५ & १३ & २१ & ९ \\ ११ & २४ & ७ & २० & ३ \end{vmatrix} = -४६८००००$$

९। सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} ० & १ & १ & १ \\ १ & ० & ल^{२} & र^{२} \\ १ & ल^{२} & ० & य^{२} \\ १ & र^{२} & य^{२} & ० \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ० & १ & ० & ० \\ १ & ० & ल^{२} & र^{२} \\ १ & ल^{२} & -ल^{२} & य^{२}-ल^{२} \\ १ & र^{२} & य^{२}-र^{२} & -र^{२} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} १ & ल^{२} & र^{२} \\ १ & -ल^{२} & य^{२}-ल^{२} \\ १ & य^{२}-र^{२} & -र^{२} \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} १ & ल^{२} & र^{२} \\ ० & -२ल^{२} & य^{२}-र^{२}-ल^{२} \\ ० & य^{२}-र^{२}-ल^{२} & -२र^{२} \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} २ल^{२} & य^{२}-र^{२}-ल^{२} \\ य^{२}-र^{२}-ल^{२} & २र^{२} \end{vmatrix}$$

$$= (य^{२}-र^{२}-ल^{२})^{२} - ४र^{२}ल^{२}$$

$$= (य^{२}-र^{२}-ल^{२}+२रल)\,(य^{२}-र^{२}-ल^{२}-२रल)$$

$$= \{य^{२}-(र-ल)^{२}\}\,\{य^{२}-(र+ल)^{२}\}$$

$$= (य-र+ल)\,(य+र-ल)\,(य-र-ल)\,(य+र+ल)$$

$$= -(य+र+ल)\,(य+ल-र)\,(य+र-ल)\,(र+ल-य)$$

१०। सिद्ध करो कि

$$\text{कफ} = \begin{vmatrix} \frac{(\text{क}+\text{ख})^२}{\text{अ}} & \text{अ} & \text{अ} \\ \text{क} & \frac{(\text{ख}+\text{अ})^२}{\text{क}} & \text{क} \\ \text{ख} & \text{ख} & \frac{(\text{अ}+\text{क})^२}{\text{ख}} \end{vmatrix} = २(\text{अ}+\text{क}+\text{ख})^३$$

कनिष्ठफल को अकख से गुण देने से

$$\text{अकख} \cdot \text{कफ} = \begin{vmatrix} (\text{क}+\text{ख})^२ & \text{अ}^२ & \text{अ}^२ \\ \text{क}^२ & (\text{ख}+\text{अ})^२ & \text{क}^२ \\ \text{ख}^२ & \text{ख}^२ & (\text{अ}+\text{क})^२ \end{vmatrix}$$

अन्तिम ऊर्ध्वाधर ध्रुवकों में घटा देने से

$$\text{अकख} \cdot \text{कफ} = \begin{vmatrix} (\text{क}+\text{ख})^२ - \text{अ}^२ & ० & \text{अ}^२ \\ ० & (\text{ख}+\text{अ})^२ - \text{क}^२ & \text{क}^२ \\ \text{ख}^२ - (\text{अ}+\text{क})^२ & \text{ख}^२ - (\text{अ}+\text{क})^२ & (\text{अ}+\text{क})^२ \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (\text{अ}+\text{क}+\text{ख})(\text{क}+\text{ख}-\text{अ}) & ० & \text{अ}^२ \\ ० & (\text{अ}+\text{क}+\text{ख})(\text{ख}+\text{अ}-\text{क}) & \text{क}^२ \\ (\text{अ}+\text{क}+\text{ख})(\text{ख}-\text{अ}-\text{क}) & (\text{अ}+\text{क}+\text{ख})(\text{ख}-\text{अ}-\text{क}) & (\text{अ}+\text{क})^२ \end{vmatrix}$$

$$= (\text{अ}+\text{क}+\text{ख})^२ \begin{vmatrix} \text{क}+\text{ख}-\text{अ} & ० & \text{अ}^२ \\ ० & \text{ख}+\text{अ}-\text{क} & \text{क}^२ \\ \text{ख}-\text{अ}-\text{क} & \text{ख}-\text{अ}-\text{क} & (\text{अ}+\text{क})^२ \end{vmatrix}$$

$$= (\text{अ}+\text{क}+\text{ख})^२ \begin{vmatrix} \text{क}+\text{ख}-\text{अ} & ० & \text{अ}^२ \\ ० & \text{ख}+\text{अ}-\text{क} & \text{क}^२ \\ -२\text{क} & -२\text{अ} & २\text{अक} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{(\text{अ}+\text{क}+\text{ख})^{\text{२}}}{\text{अ}\cdot\text{क}}\begin{vmatrix}\text{अ}(\text{क}+\text{ख}-\text{अ}) & \text{०} & \text{अ}^{\text{२}}\\ \text{०} & \text{क}(\text{ख}+\text{अ}-\text{क}) & \text{क}^{\text{२}}\\ -\text{२अक} & -\text{२अक} & \text{२अक}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{(\text{अ}+\text{क}+\text{ख})^{\text{२}}}{\text{अ}\cdot\text{क}}\begin{vmatrix}\text{अ}(\text{अ}+\text{क}) & \text{अ}^{\text{२}} & \text{अ}^{\text{२}}\\ \text{क}^{\text{२}} & \text{क}(\text{ख}+\text{अ}) & \text{क}^{\text{२}}\\ \text{०} & \text{०} & \text{२अक}\end{vmatrix}$$

$$=\text{२अक}(\text{अ}+\text{क}+\text{ख})^{\text{२}}\begin{vmatrix}\text{क}+\text{ख} & \text{अ} & \text{अ}\\ \text{क} & \text{ख}+\text{अ} & \text{क}\\ \text{०} & \text{०} & \text{१}\end{vmatrix}$$

$$=\text{२अक}(\text{अ}+\text{क}+\text{ख})^{\text{२}}\begin{vmatrix}\text{क}+\text{ख} & \text{अ}\\ \text{क} & \text{ख}+\text{अ}\end{vmatrix}$$

$$=\text{२अकख}\ (\text{अ}+\text{क}+\text{ख})^{\text{३}}$$

$\therefore$ कफ $=\text{२}(\text{अ}+\text{क}+\text{ख})^{\text{३}}$ ।

११ । सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix}\text{१} & \text{१} & \text{१}\\ \text{अ} & \text{क} & \text{ख}\\ \text{अ}^{\text{३}} & \text{क}^{\text{३}} & \text{ख}^{\text{३}}\end{vmatrix}=(\text{क}-\text{ख})(\text{ख}-\text{अ})(\text{अ}-\text{क})(\text{अ}+\text{क}+\text{ख})$$

१२ । सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix}\text{१} & \text{१} & \text{१} & \text{१} & \text{१}\\ \text{अ} & \text{क} & \text{ख} & \text{ग} & \text{घ}\\ \text{अ}^{\text{२}} & \text{क}^{\text{२}} & \text{ख}^{\text{२}} & \text{ग}^{\text{२}} & \text{घ}^{\text{२}}\\ \text{अ}^{\text{४}} & \text{क}^{\text{४}} & \text{ख}^{\text{४}} & \text{ग}^{\text{४}} & \text{घ}^{\text{४}}\end{vmatrix}=-(\text{क}-\text{ख})(\text{अ}-\text{घ})(\text{ख}-\text{अ})(\text{क}-\text{घ})(\text{अ}-\text{क})\cdots\cdots(\text{ग}-\text{घ})(\text{अ}+\text{क}+\text{ख}+\text{ग}+\text{घ})$$

१३ । सिद्ध करो कि

कफ $=\begin{vmatrix}\text{अ} & \text{क} & \text{ख}\\ \text{ख} & \text{अ} & \text{क}\\ \text{क} & \text{ख} & \text{अ}\end{vmatrix}$ **इसका मान बताओ ।**

मान लो कि १ का घनमूल घा, घा^{२}, घा^{३}, = १ ये हैं। दूसरी ऊर्ध्वाधर को घा से, तीसरी को घा^{२} से गुण कर पहिली में जो १ = घा^{३} से गुणित है जोड़ देने से

$$\text{कफ} = \begin{vmatrix} \text{अघा}^{३} + \text{कघा} + \text{खघा}^{२} & \text{क} & \text{ख} \\ \text{खघा}^{३} + \text{अघा} + \text{कघा}^{२} & \text{अ} & \text{क} \\ \text{कघा}^{३} + \text{खघा} + \text{अघा}^{२} & \text{ख} & \text{अ} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \text{अ} + \text{कघा} + \text{खघा}^{२} & \text{क} & \text{ख} \\ \text{घा}(\text{अ} + \text{कघा} + \text{खघा}^{२}) & \text{अ} & \text{क} \\ \text{घा}^{२}(\text{अ} + \text{कघा} + \text{खघा}^{२}) & \text{क} & \text{अ} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{अ} + \text{कघा} + \text{खघा}^{२}) \begin{vmatrix} १ & \text{क} & \text{ख} \\ \text{घा} & \text{अ} & \text{क} \\ \text{घा}^{२} & \text{ख} & \text{अ} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{अ} + \text{कघा} + \text{खघा}^{२}) \begin{vmatrix} १ + \text{घा} + \text{घा}^{२} & \text{अ} + \text{क} + \text{ख} & \text{अ} + \text{क} + \text{ख} \\ \text{घा} & \text{अ} & \text{क} \\ \text{घा}^{२} & \text{ख} & \text{अ} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{अ} + \text{कघा} + \text{खघा}^{२}) \begin{vmatrix} ० & \text{अ} + \text{क} + \text{ख} & \text{अ} + \text{क} + \text{ख} \\ \text{घा} & \text{अ} & \text{क} \\ \text{घा}^{२} & \text{ख} & \text{अ} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{अ} + \text{क} + \text{ख})(\text{अ} + \text{कघा} + \text{खघा}^{२}) \begin{vmatrix} ० & १ & १ \\ \text{घा} & \text{अ} & \text{क} \\ \text{घा}^{२} & \text{ख} & \text{अ} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{अ} + \text{क} + \text{ख})(\text{अ} + \text{कघा} + \text{खघा}^{२}) \begin{vmatrix} ० & ० & १ \\ \text{घा} & \text{अ} - \text{क} & \text{क} \\ \text{घा}^{२} & \text{ख} - \text{अ} & \text{अ} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{अ} + \text{क} + \text{ख})(\text{अ} + \text{कघा} + \text{खघा}^{२}) \begin{vmatrix} \text{घा} & \text{अ} - \text{क} \\ \text{घा}^{२} & \text{ख} - \text{अ} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{अ} + \text{क} + \text{ख})\ (\text{अ} + \text{कघा} + \text{खघा}^{२})\ (\text{अ} + \text{खघा} + \text{कघा}^{२})\ ।$$

१४। सिद्ध करो कि

$$\text{कफ} = \begin{vmatrix} \text{अ} & \text{क} & \text{ख} & \text{ग} \\ \text{क} & \text{अ} & \text{ग} & \text{ख} \\ \text{ख} & \text{ग} & \text{अ} & \text{क} \\ \text{ग} & \text{ख} & \text{क} & \text{अ} \end{vmatrix} = -(\text{अ}+\text{क}+\text{ख}+\text{ग})(\text{क}+\text{ख}-\text{अ}-\text{ग})(\text{ख}+\text{अ}-\text{क}-\text{घ})(\text{अ}+\text{क}-\text{ख}-\text{घ})$$

१८९ प्रक्रम का ८वाँ उदाहरण देखो उसमें $-\text{अ} = \text{अ}$।

यहाँ प्रत्येक गुणक खण्ड निकल आवेंगे। जैसे पहिले ऊर्ध्वाधर में दूसरे को जोड़ तीसरा और चौथा घटाओ तो $\text{अ}+\text{क}-\text{ख}-\text{घ}$ यह गुणक खण्ड आ जायगा। प्रथम ऊर्ध्वाधर में और तीनों को जोड़ देने से $\text{अ}+\text{क}+\text{ख}+\text{ग}$ यह गुणक आ जायगा। इस प्रकार और भी दोनों गुणक आ जायँगे।

१९३—कलिष्ठफलों का गुणन।

यदि

$$\begin{vmatrix} \text{अ}_1 & \text{क}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{अ}_2 & \text{क}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{अ}_3 & \text{क}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix} \text{ इसका और } \begin{vmatrix} \text{आ}_1 & \text{का}_1 & \text{गा}_1 \\ \text{आ}_2 & \text{का}_2 & \text{गा}_2 \\ \text{आ}_3 & \text{का}_3 & \text{गा}_3 \end{vmatrix}$$

इसका मान फैलाकर बीजगणित की साधारण रीति से गुणन करो और गुणनफलों के प्रत्येक पद को यथोचित क्रम से रक्खो तो गुणनफल

$$\begin{vmatrix} \text{अ}_1\text{आ}_1+\text{क}_1\text{का}_1+\text{ग}_1\text{गा}_1 & \text{अ}_1\text{आ}_2+\text{क}_1\text{का}_2+\text{ग}_1\text{गा}_2 & \text{अ}_1\text{आ}_3+\text{क}_1\text{का}_3+\text{ग}_1\text{गा}_3 \\ \text{अ}_2\text{आ}_1+\text{क}_2\text{का}_1+\text{ग}_2\text{गा}_1 & \text{अ}_2\text{आ}_2+\text{क}_2\text{का}_2+\text{ग}_2\text{गा}_2 & \text{अ}_2\text{आ}_3+\text{क}_2\text{का}_3+\text{ग}_2\text{गा}_3 \\ \text{अ}_3\text{आ}_1+\text{क}_3\text{का}_1+\text{ग}_3\text{गा}_1 & \text{अ}_3\text{आ}_2+\text{क}_3\text{का}_2+\text{ग}_3\text{गा}_2 & \text{अ}_3\text{आ}_3+\text{क}_3\text{का}_3+\text{ग}_3\text{गा}_3 \end{vmatrix}$$

इसके तुल्य होगा।

इस पर से सिद्ध होता है कि गुण्य और गुणक (जिनके प्रत्येक पंक्ति में ध्रुवों की संख्या एक ही है) के प्रत्येक पंक्ति में जितने ध्रुवक होंगे उतने ही गुणनफल के प्रत्येक पंक्ति में ध्रुवक होंगे। और गुण्य गुणक के तुल्य स्थानीय प्रति तिर्यक् पंक्तिस्थ ध्रुवों के गुणनफल के योग के समान गुणनफल के तिर्यक् पंक्तिस्थ ध्रुवक होते हैं। अर्थात् गुण्य के प्रथम तिर्यक् पंक्तिस्थ पहिले ध्रुव अ$_1$ से गुणक के प्रथम तिर्यक् पंक्तिस्थ पहिले ध्रुव आ$_1$ को, दूसरे ध्रुव क$_1$ से दूसरे ध्रुव का$_1$ को और तीसरे ध्रुव ग$_1$ से तीसरे ध्रुव गा$_1$ को गुण कर जोड़ देने से गुणनफल की पहिली तिर्यक् पंक्ति में पहिला ध्रुव होगा। गुण्य के पहिली तिर्यक् पंक्तिस्थ ध्रुवों से गुणक के द्वितीय तिर्यक् पंक्तिस्थ ध्रुवों को क्रम से यथा स्थान गुण कर जोड़ लेने से गुणनफल में पहिली तिर्यक् पंक्ति का द्वितीय ध्रुव होगा और गुण्य के उन्हीं ध्रुवों से गुणक के तृतीय तिर्यक् पंक्तिस्थ ध्रुवों को क्रम से यथा स्थान गुण कर जोड़ लेने से गुणनफल में पहिली तिर्यक् पंक्ति का तीसरा ध्रुव होगा।

इसी प्रकार गुण्य के द्वितीय तिर्यक् पंक्तिस्थ ध्रुवों से यथा स्थानक गुणक के प्रति तिर्यक् पंक्तिस्थ ध्रुवों को गुण कर जोड़ लेने से गुणनफल में द्वितीय तिर्यक् पंक्तिस्थ क्रम से ध्रुव होंगे।

इसी प्रकार गुण्य के तृतीय तिर्यक् पंक्तिस्थ ध्रुवों से गुणनफल के तृतीय तिर्यक् पंक्तिस्थ ध्रुवों को बना लेना चाहिए।

यह नियम तीन ध्रुव की पंक्ति में ऊपर के गुणनफल में प्रत्यक्ष देख पड़ता है परन्तु चाहे पंक्ति में जितने ध्रुव हों सब के लिये ऊपर का नियम सत्य हो जाता है।

यहां गुणनफल में प्रत्येक ऊर्ध्वाधर पंक्तिस्थ ध्रुव में तीन तीन खण्ड हैं। इसलिये गुणनफल रूप कनिष्ठफल को १९० वें प्रक्रम से २७ अन्यकनिष्ठफलों के योग रूप में ला सकते हो। १८७ प्रक्रम के ३ उदाहरण में भी दो कनिष्ठफलों के गुणनफल के तुल्य एक कनिष्ठफल आया है। उदाहरण—

(१) सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} \text{अ} + \text{उक} & \text{ख} + \text{उग} \\ -\text{ख} + \text{उग} & \text{अ} - \text{उक} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \text{अ}' - \text{उक}' & \text{ख}' - \text{उग}' \\ -\text{ख}' - \text{उग}' & \text{अ}' + \text{उक}' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \text{गा} - \text{उखा} & \text{का} - \text{उआ} \\ -\text{का} - \text{उआ} & \text{गा} + \text{उखा} \end{vmatrix}$$

जहां $\text{उ} = \sqrt{-१}$, $\text{आ} = \text{कख}' - \text{क}'\text{ख} + \text{अग}' - \text{अ}'\text{ग}$,

$$\text{का} = \text{खअ}' - \text{ख}'\text{अ} + \text{कग}' - \text{क}'\text{ग},$$

$\text{खा} = \text{अक}' - \text{अ}'\text{क} + \text{खग}' - \text{ख}'\text{ग}$, $\text{गा} = \text{अअ}' + \text{कक}' + \text{ख}'\text{६} + \text{गग}'$ ।

गुण्य, गुणक और गुणनफल का मान फैलाने से यहां

$$(\text{अ}^२ + \text{क}^२ + \text{ख}^२ + \text{ग}^२)(\text{अ}'^२ + \text{क}'^२ + \text{ख}'^२ + \text{ग}'^२)$$

$$= (\text{अअ}' + \text{कक}' + \text{खख}' + \text{गग}')^२ + (\text{कख}' - \text{क}'\text{ख} + \text{अग}' - \text{अ}'\text{ग})^२$$

$$+ (\text{खअ}' - \text{ख}'\text{अ} + \text{कग}' - \text{क}'\text{ग})^२ + (\text{अक}' - \text{अ}'\text{क} + \text{खग}' - \text{ख}'\text{ग})^२$$

यही ओलर का सिद्धान्त (Euler's theorem) है। इस पर से किसी चार संख्या के दो यूथों के वर्ग योग के गुणनफल को चार संख्याओं के वर्ग योग के रूप में ला सकते हैं।

(२) सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} २कख - अ^२ & ख^२ & क^२ \\ ख^२ & २खअ - क^२ & अ^२ \\ क^२ & अ^२ & २अक - ख^२ \end{vmatrix} = (अ^३ + क^३ + ख^३ - ३ अकख)^२$$

ऊपर के कनिष्ठफल को सहज में जान सकते हो कि

$$\begin{vmatrix} अ & क & ख \\ क & ख & अ \\ ख & अ & क \end{vmatrix} \text{ और } \begin{vmatrix} -अ & ख & क \\ -क & अ & ख \\ -ख & क & अ \end{vmatrix}$$ इसके गुणनफल के तुल्य है।

(३) सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} १ & ० & ० & ० \\ ० & १ & ० & ० \\ ० & ० & अ_१ & क_१ \\ ० & ० & अ_२ & क_२ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} अ_१ & क_१ \\ अ_२ & क_२ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} १ & अ & क & ख \\ ० & १ & ग & घ \\ ० & ० & अ_१ & क_१ \\ ० & ० & अ_२ & क_२ \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} १ & अ & क & ख \\ ० & १ & ० & ० \\ ० & ग & अ_१ & क_१ \\ ० & घ & अ_२ & क_२ \end{vmatrix}$$ (१८७ वां प्रक्रम देखो)

१९४। यदि ऊर्ध्वाधर और तीर्यक् पंक्ति समान न हों तो ऐसे ध्रुवकस्थिति को आयताकृति कहते हैं।

ये ध्रुव स्वयं तो कोई परिच्छिन्न फल नहीं उत्पन्न करते परन्तु दो आयताकृति ध्रुवकों के १९३ वें प्रक्रम की युक्ति से गुणनफल से एक कनिष्ठफल उत्पन्न कर सकते हैं और उसका मान इस प्रकार जान सकते हैं। कल्पना करो कि

$$\left.\begin{matrix} अ_1 & क_1 & ख_1 & ग_1 \\ अ_2 & क_2 & ख_2 & ग_2 \end{matrix}\right\}\cdots(१) \quad \left.\begin{matrix} आ_1 & का_1 & खा_1 & गा_1 \\ आ_2 & का_2 & खा_2 & गा_2 \end{matrix}\right\}\cdots(२)$$

ये दो आयताकार ध्रुवक हैं। १८३ वें प्रक्रम की युक्ति से इनके गुणन से कनिष्ठफल

$$\left|\begin{matrix} अ_1आ_1+क_1का_1+ख_1खा_1+ग_1गा_1 & अ_1आ_2+क_1का_2+ख_1खा_2+ग_1गा_2 \\ अ_2आ_1+क_2का_1+ख_2खा_1+ग_2गा_1 & अ_2आ_2+क_2का_2+ख_2खा_2+ग_2गा_2 \end{matrix}\right|$$

यह होगा जिसका मान स्पष्ट है कि अन्य कनिष्ठों के योग रूप में

$$(अ_1क_2)(आ_1का_2)+(अ_1ख_2)(आ_1खा_2)+(अ_1ग_2)(आ_1गा_2)$$
$$+(क_1ख_2)(का_1खा_2)+(क_1ग_2)(का_1गा_2)+(ख_1ग_2)(खा_1गा^2)$$

यह होगा। अर्थात् तिर्यक् पंक्ति के समान ऊर्ध्वाधर पंक्ति को लेकर यथा स्थानक दोनों आयताकार ध्रुवों के वश जितने संभाव्य एक एक कनिष्ठफल हों उनके गुणनफल के योग के समान ऊपर का कनिष्ठफल होगा।

१६५—ऊपर तो वह स्थिति दिखलाई गई है जिसमें तिर्यक् पंक्ति की संख्या ऊर्ध्वाधर पंक्ति की संख्या से अल्प है, अब वह स्थिति दिखलाते हैं जिसमें ऊर्ध्वाधर ही तिर्यक् से अल्प है। इसमें १६३ वें प्रक्रम की युक्ति से गुणनफल रूप कनिष्ठफल शून्य के तुल्य होगा क्योंकि यदि

$$\left.\begin{matrix} अ_1 & क_1 \\ अ_2 & क_2 \\ अ_3 & क_3 \end{matrix}\right\}\cdots(१) \quad \left.\begin{matrix} आ_1 & का_1 \\ आ_2 & का_2 \\ आ_3 & का_3 \end{matrix}\right\}\cdots(२)$$

इन पर से गुणनफल रूप कनिष्ठफल

$$\begin{vmatrix} \text{अ}_1\text{आ}_1 + \text{क}_1\text{का}_1 & \text{अ}_1\text{आ}_2 + \text{क}_1\text{का}_2 & \text{अ}_1\text{आ}_3 + \text{क}_1\text{का}_3 \\ \text{अ}_2\text{आ}_1 + \text{क}_2\text{का}_1 & \text{अ}_2\text{आ}_2 + \text{क}_2\text{का}_2 & \text{अ}_2\text{आ}_3 + \text{क}_2\text{का}_3 \\ \text{अ}_3\text{आ}_1 + \text{क}_3\text{का}_1 & \text{अ}_3\text{आ}_2 + \text{क}_3\text{का}_2 & \text{अ}_3\text{आ}_3 + \text{क}_3\text{का}_3 \end{vmatrix}$$

यह होगा जो स्पष्ट है कि १९३ वें प्र० की युक्ति से

$$\begin{vmatrix} 0 & \text{अ}_1 & \text{क}_1 \\ 0 & \text{अ}_2 & \text{क}_2 \\ 0 & \text{अ}_3 & \text{क}_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & \text{आ}_1 & \text{का}_1 \\ 0 & \text{आ}_2 & \text{का}_2 \\ 0 & \text{आ}_3 & \text{का}_3 \end{vmatrix} = 0$$

इसके तुल्य होगा।

यह तो दो तिर्यक् और दो ऊर्ध्वाधर आयतों में दिखलाया गया है। परन्तु इसी प्रकार सर्वत्र सिद्ध कर सकते हो कि ऊर्ध्वाधर से यदि तिर्यक् अल्प हो तो १९४ वें प्रक्रम की स्थिति होगी और यदि ऊर्ध्वाधर तिर्यक् पंक्ति की संख्या से अल्प हो तो गुणनफल रूप कनिष्ठफल सर्वदा शून्य होगा।

उदाहरण— १।

$$\left.\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ \text{अ} & \text{क} & \text{ख} \end{matrix}\right\} \cdots (1) \quad \left.\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ \text{अ} & \text{क} & \text{ख} \end{matrix}\right\} \cdots (2)$$

इन आयतस्थ ध्रुवों से सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} 3 & \text{अ} + \text{क} + \text{ख} \\ \text{अ}+\text{क}+\text{ख} & \text{अ}^2 + \text{क}^2 + \text{ख}^2 \end{vmatrix} \equiv (\text{अ} - \text{क})^2 + (\text{अ} - \text{ख})^2 + (\text{क} - \text{ख})^2$$

२।

$$\left.\begin{matrix} \text{अ} & \text{क} & \text{ख} \\ \text{अ}' & \text{क}' & \text{ख}' \end{matrix}\right\} \cdots (1) \quad \left.\begin{matrix} \text{ख} & -2\text{क} & \text{अ} \\ \text{ख}' & -2\text{क}' & \text{अ}' \end{matrix}\right\} \cdots (2)$$

इनसे सिद्ध करो कि

$$४(\text{अख}-\text{क}^{२})(\text{अ}'\text{ख}'-\text{क}'^{२})-(\text{अख}'+\text{अ}'\text{ख}-२\text{कक}')^{२}$$
$$\equiv ४(\text{कख}'-\text{क}'\text{ख})(\text{अक}'-\text{अ}'\text{क})-(\text{अख}'-\text{अ}'\text{ख})^{२}$$

३। सिद्ध करो कि

$$\left.\begin{matrix} \text{अ} & \text{क} & \text{ख} \\ \text{अ}' & \text{क}' & \text{ख}' \end{matrix}\right\}$$

इसको इससी से १९२ प्र० की युक्ति से गुण से एक

$$(\text{अ}^{२}+\text{क}^{२}+\text{ख}^{२})(\text{अ}'^{२}+\text{क}'^{२}+\text{ख}'^{२})\equiv(\text{अअ}'+\text{कक}'+\text{खख}')^{२}$$
$$+(\text{कख}'-\text{ख}'\text{क})^{२}+(\text{खअ}'-\text{ख}'\text{अ})^{२}+(\text{अक}'-\text{अ}'\text{क})^{२}$$

ऐसा समीकरण बन सकता है।

४। सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} (\text{अ}_{१}-\text{क}_{१})^{२} & (\text{अ}_{१}-\text{क}_{२})^{२} & (\text{अ}_{१}-\text{क}_{३})^{२} & (\text{अ}_{१}-\text{क}_{४})^{२} \\ (\text{अ}_{२}-\text{क}_{१})^{२} & (\text{अ}_{२}-\text{क}_{२})^{२} & (\text{अ}_{२}-\text{क}_{३})^{२} & (\text{अ}_{२}-\text{क}_{४})^{२} \\ (\text{अ}_{३}-\text{क}_{१})^{२} & (\text{अ}_{३}-\text{क}_{२})^{२} & (\text{अ}_{३}-\text{क}_{३})^{२} & (\text{अ}_{३}-\text{क}_{४})^{२} \\ (\text{अ}_{४}-\text{क}_{१})^{२} & (\text{अ}_{४}-\text{क}_{२})^{२} & (\text{अ}_{४}-\text{क}_{३})^{२} & (\text{अ}_{४}-\text{क}_{४})^{२} \end{vmatrix}\equiv ०$$

$$\left.\begin{matrix} \text{अ}^{२}_{१} & \text{अ}_{१} & १ \\ \text{अ}^{२}_{२} & \text{अ}_{२} & १ \\ \text{अ}^{२}_{३} & \text{अ}_{३} & १ \\ \text{अ}^{२}_{४} & \text{अ}_{४} & १ \end{matrix}\right\}\cdots\cdots(१) \qquad \left.\begin{matrix} १ & -२\text{क}_{१} & \text{क}^{२}_{१} \\ १ & -२\text{क}_{२} & \text{क}^{२}_{२} \\ १ & -२\text{क}_{३} & \text{क}^{२}_{३} \\ १ & -२\text{क}_{४} & \text{क}^{२}_{४} \end{matrix}\right\}\cdots\cdots(२)$$

१९९—एक घात अनेक वर्ण समीकरण में कनिष्ठफल से अव्यक्त मानानयन।

१८९वें प्रक्रम में दिखला चुके हैं कि

$$\text{कफ}=\text{अ}_{१}\text{आ}_{१}+\text{अ}_{२}\text{आ}_{२}+\text{अ}_{३}\text{आ}_{३}+\cdots\cdots \text{इत्यादि}$$

जहां $\text{आ}_{१}, \text{आ}_{२}$, इत्यादि $\text{अ}_{१}, \text{अ}_{२}, \cdots\cdots$ ऊर्ध्वाधर पंक्तिस्थ ध्रुवों के अतिरिक्त और ऊर्ध्वाधर पंक्तिस्थ ध्रुवों के वश से उत्पन्न हुए हैं।

यदि $अ_1, अ_2, अ_3$ इत्यादि क्रम से $क_1, क_2, क_3$ इत्यादि के तुल्य हों तो १८२वें प्रक्रम से कनिष्ठफल शून्य होगा; इसलिये ऊपर के मान में उत्थापन देने से

$$कफ = क_1 आ_1 + क_2 आ_2 + क_3 आ_3 + \text{ इत्यादि } = 0$$

इसी प्रकार $ख_1 आ_1 + ख_2 आ_2 + ख_3 आ_3 + \text{ इत्यादि } = 0$

इसी प्रकार आगे भी जानना चाहिए। अब इसके बल से एक घात अनेक वर्ण समीकरण में अव्यक्त मान इस प्रकार जान सकते हैं। मान लो कि

$$अ_1 य + क_1 र + ख_1 ल = म_1 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$
$$अ_2 य + क_2 र + ख_2 ल = म_2 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$
$$अ_3 य + क_3 र + ख_3 ल = म_3 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

ये दिए हुए समीकरण हैं। इनके गुणक $अ_1, अ_2, \cdots\cdots$; $क_1, क_2, \cdots\cdots$ इत्यादि को ध्रुवक मान पिछले प्रक्रमों से $आ_1, आ_2, \cdots\cdots$ इत्यादि के मान जानकर (१) समीकरण को $आ_1$ से, (२) को $आ_2$ से और (३) को $आ_3$ से गुण कर जोड़ लेने से

$$(अ_1 आ_1 + अ_2 आ_2 + अ_3 आ_3) य + (क_1 आ_1 + क_2 आ_2 + क_3 आ_3) र + (ख_1 आ_1 + ख_2 आ_2 + ख_3 आ_3) ल$$

$$= कफ य = म_1 आ_1 + म_2 आ_2 + म_3 आ_3$$

$$= \begin{vmatrix} म_1 & क_1 & ख_1 \\ म_2 & क_2 & ख_2 \\ म_3 & क_3 & ख_3 \end{vmatrix}$$

इसी प्रकार

$$(क_1 का_1 + क_2 का_2 + क_3 का_3) र = म_1 का_1 + म_2 का_2 + म_3 का_3$$

$$\text{कफर} = \begin{vmatrix} \text{अ}_1 & \text{म}_1 & \text{ख}_1 \\ \text{अ}_2 & \text{म}_2 & \text{ख}_2 \\ \text{अ}_3 & \text{म}_3 & \text{ख}_3 \end{vmatrix}$$

और

$$\text{कफल} = \begin{vmatrix} \text{अ}_1 & \text{क}_1 & \text{म}_1 \\ \text{अ}_2 & \text{क}_2 & \text{म}_2 \\ \text{अ}_3 & \text{क}_3 & \text{म}_3 \end{vmatrix}$$

अर्थात्

$$\text{कफ·य} = (\text{म}_1\text{क}_2\text{ख}_3)$$
$$\text{कफ·र} = (\text{अ}_1\text{म}_2\text{ख}_3)$$
$$\text{कफ·ल} = (\text{अ}_1\text{क}_2\text{म}_3)$$

इसी प्रकार साधारण से जहाँ य, र, ल, व, श, ष .... अव्यक्त हैं तहाँ

$$\text{य} = \frac{(\text{म}_1\text{क}_2\text{ख}_3 \cdots\cdots \text{ट}_\text{न})}{(\text{अ}_1\text{क}_2\text{ख}_3 \cdots\cdots \text{ट}_\text{न})}, \quad \text{र} = \frac{(\text{अ}_1\text{म}_2\text{ख}_3 \cdots\cdots \text{ट}_\text{न})}{(\text{अ}_1\text{क}_2\text{ख}_3 \cdots\cdots \text{ट}_\text{न})}$$

$$\text{ल} = \frac{(\text{अ}_1\text{क}_2\text{म}_3 \cdots\cdots \text{ट}_\text{न})}{(\text{अ}_1\text{क}_2\text{ख}_3 \cdots\cdots \text{ट}_\text{न})}, \quad \text{इत्यादि।}$$

(संकेत के लिये १८७ वां प्रक्रम देखो)

१९७—इसी प्रकार एक घात अनेक वर्ण समीकरण में जहां न अव्यक्त हों और समीकरण न − १ इतने ही हों अर्थात् जैसे

$$\left.\begin{aligned} \text{अ}_1\text{य} + \text{क}_1\text{र} + \text{ख}_1\text{ल} + \text{ग}_1\text{व} = 0 \\ \text{अ}_2\text{य} + \text{क}_2\text{र} + \text{ख}_2\text{ल} + \text{ग}_2\text{व} = 0 \\ \text{अ}_3\text{य} + \text{क}_3\text{र} + \text{ख}_3\text{ल} + \text{ग}_3\text{व} = 0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

यहां अज्ञात वर्ण चार और समीकरण तीन ही हैं तो कल्पना करो कि एक चौथा समीकरण

$$अ_४ य + क_४ र + ख_४ ल + ग_४ व = उ \ldots\ldots\ldots\ldots (२)$$

ऐसा है जहां $अ_४, क_४, \ldots\ldots, उ$ कोई कल्पित संख्यायें हैं। (१) के नीचे (२) इसे भी मिला देने से १६६वें प्रक्रम की युक्ति से $म_१ = म_२ = म_३ = ०$ मानने से और $म_४ = उ$

$$कफ \cdot य = उ \cdot आ_४,\ कफ \cdot र = उ \cdot का_४,\ कफ \cdot ल = उ \cdot खा_४,$$

$$कफ \cdot व = उगा_४$$

अथवा

$$\frac{य}{आ_४} = \frac{र}{का_४} = \frac{ल}{खा_४} = \frac{व}{गा_४} = \frac{उ}{कफ} \ldots\ldots\ldots\ldots (३)$$

ऊपर के तीनों समकीरण तीन दिए समीकरणों में जो अव्यक्त के गुणक हैं उनके रूप में अव्यक्तों की निष्पत्ति दिखलाते हैं।

यदि मान लें कि $उ = ०$ तो (३) से

$$कफ \cdot य = उ \cdot आ_४ = ० \quad \therefore\ कफ = ०$$

(३) से जो अव्यक्त मान आते हैं उनका (२) में उत्थापन देने से

$$अ_४ आ_४ उ + क_४ का_४ उ + ख_४ खा_४ उ + ग_४ गा_४ उ = उ \cdot कफ$$

या $$अ_४ आ_४ + क_४ का_४ + ख_४ खा_४ + ग_४ गा_४ = कफ = ०$$

इस पर से यह सिद्ध होता है कि

यदि न वर्णों से न समीकरण बनें जिसमें दहिना पक्ष शून्य के तुल्य हों तो १६६वें प्रक्रम की युक्ति

से अव्यक्तों के गुणकों से जो कनिष्ठफल होगा वह शून्य के तुल्य होगा।

१९७—हरात्मक वा उत्क्रम कनिष्ठफल।

१८९वें प्रक्रम में $आ_1, का_1, खा_1, \cdots\cdots आ_2, का_2, खा_2, \cdots\cdots$ इत्यादि जो दिखला आए हैं उन्हें उत्क्रम ध्रुव कहते हैं। उत्क्रम ध्रुवों से जो कनिष्ठफल उत्पन्न होता है उसे हरात्मक वा उत्क्रम कनिष्ठफल कहते हैं। कनिष्ठफल और उत्क्रम कनिष्ठ-फल के वश से भी अनेक चमत्कृत सिद्धान्त उत्पन्न होते हैं। जैसे उत्क्रम कनिष्ठफल को उकफ कहो तो

(१)

$$कफ = \begin{vmatrix} अ_1 & क_1 & ख_1 \\ अ_2 & क_2 & ख_2 \\ अ_3 & क_3 & ख_3 \end{vmatrix} \qquad उकफ = \begin{vmatrix} आ_1 & का_1 & खा_1 \\ आ_2 & का_2 & खा_2 \\ आ_3 & का_3 & खा_3 \end{vmatrix}$$

१९३वें प्रक्रम की युक्ति से इन दोनों का गुणनफल करो तो

$$कफ \cdot उकफ = \begin{vmatrix} कफ & 0 & 0 \\ 0 & कफ & 0 \\ 0 & 0 & कफ \end{vmatrix} = कफ^3$$

इसलिये $उकफ = कफ^2$।

यह तो तीन अक्षरों की पंक्ति पर से लाघव के लिये दिख-लाया है। इसी प्रकार सर्वत्र चाहे पंक्ति में जितने अक्षर हों सिद्ध होता है कि

दिए हुए कनिष्ठफल के $न-1$ घात के तुल्य उत्क्रम कनिष्ठफल होता है।

(२) उत्क्रम कनिष्ठफल के कोई लघु कनिष्ठफल को अपने मुख्य कनिष्ठफल सम्बन्धी ध्रुवों के रूप में ले आने के लिये चार अक्षर की पंक्ति के लेने से

$$\begin{vmatrix} \text{अ}_1 & \text{क}_1 & \text{ख}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{अ}_2 & \text{क}_2 & \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{अ}_3 & \text{क}_3 & \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \\ \text{अ}_4 & \text{क}_4 & \text{ख}_4 & \text{ग}_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \text{आ}_2 & \text{का}_2 & \text{खा}_2 & \text{गा}_2 \\ \text{आ}_3 & \text{का}_3 & \text{खा}_3 & \text{गा}_3 \\ \text{आ}_4 & \text{का}_4 & \text{खा}_4 & \text{गा}_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{अ}_1 & 0 & 0 & 0 \\ \text{अ}_2 & \text{कफ} & 0 & 0 \\ \text{अ}_3 & 0 & \text{कफ} & 0 \\ \text{अ}_4 & 0 & 0 & \text{कफ} \end{vmatrix}$$

इसलिये

$$\text{कफ} \begin{vmatrix} \text{का}_2 & \text{खा}_2 & \text{गा}_2 \\ \text{का}_3 & \text{खा}_3 & \text{गा}_3 \\ \text{का}_4 & \text{खा}_4 & \text{गा}_4 \end{vmatrix} = \text{अ}_1\text{कफ}^3 \text{।}$$

$$\text{वा} \quad (\text{का}_2\text{खा}_2\text{गा}_2) = \text{अ}_1\text{कफ}^2 \text{।}$$

इस प्रकार उकफ में आ₁ का पूरक जो प्रथम लघु कनिष्ठ-फल है वह आ गया। दूसरा लघु कनिष्ठफल (१८५ प्र० देखो) निकालना हो तो ऊपर की युक्ति से

$$\begin{vmatrix} \text{अ}_1 & \text{क}_1 & \text{ख}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{अ}_2 & \text{क}_2 & \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{अ}_3 & \text{क}_3 & \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \\ \text{अ}_4 & \text{क}_4 & \text{ख}_4 & \text{ग}_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \text{आ}_3 & \text{का}_3 & \text{खा}_3 & \text{गा}_3 \\ \text{आ}_4 & \text{का}_4 & \text{खा}_4 & \text{गा}_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{अ}_1 & \text{क}_1 & 0 & 0 \\ \text{अ}_2 & \text{क}_2 & 0 & 0 \\ \text{अ}_3 & \text{क}_3 & \text{कफ} & 0 \\ \text{अ}_4 & \text{क}_4 & 0 & \text{कफ} \end{vmatrix}$$

इसलिये

$$\text{कफ} \begin{vmatrix} \text{खा}_3 & \text{गा}_3 \\ \text{खा}_4 & \text{गा}_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{अ}_1 & \text{क}_1 \\ \text{अ}_2 & \text{क}_2 \end{vmatrix} \text{कफ}$$

अर्थात् $(\text{खा}_{३}\text{गा}_{४}) = (\text{अ}_{१}\text{क}_{२})$ कफ ।

इस पर से सामान्यतः यह क्रिया उत्पन्न होती है:—

उत्क्रम कनिष्ठफल का म संख्यक लघु कनिष्ठ-फल, मुख्य कनिष्ठफल के म−१ घात से गुणित जो मुख्य कनिष्ठफल के म संख्यक लघु कनिष्ठ-फल का पूरक हो उसके तुल्य होता है ।

जैसे ऊपर के उदाहरण में यदि पंक्ति में पांचवां एक अक्षर घ और घा और बढ़ जाता तो

$$(\text{खा}_{३}\text{गा}_{४}\text{घा}_{५}) = (\text{अ}_{१}\text{क}_{२})\text{कफ}^{२} ।$$

यदि मुख्य कनिष्ठफल शून्य हो तो ऊपर की क्रिया से स्पष्ट है कि उत्क्रम कनिष्ठफल और इसके सब लघु कनिष्ठ-फल शून्य होंगे । इस पर से यह भी सिद्ध होता है कि

यदि कोई कनिष्ठफल शून्य हो तो इसके और इसके उत्क्रम कनिष्ठफल के यथा स्थानक पंक्तिओं के ध्रुवकों में समान निष्पत्ति होगी ।

१९९—**सम्बद्ध ध्रुव**—यत्संख्यक तिर्यक् पंक्ति में यत्संख्यक ध्रुव है तत्संख्यक ऊर्ध्वाधर पंक्ति के तत्संख्यक ध्रुव को लो तो इन दोनों ध्रुवों में एक दूसरे का संबद्ध ध्रुव कहाता है । जैसे चार अक्षर की पंक्ति में तीसरी पंक्ति का चौथा ध्रुव $\text{ग}_{४}$ और तीसरी ऊर्ध्वाधर पंक्ति का चौथा ध्रुव $\text{ख}_{३}$ ये दोनों परस्पर संबद्ध ध्रुव कहे जाते हैं । ये जिस वर्ग-

क्षेत्र के दो कोने पर हैं उनसे अन्य दोनों कोनों पर गई हुई कर्णरेखा से विरुद्ध दिशा में दोनों तुल्य अन्तर पर रहते हैं। परन्तु ये कर्णप्रधान ध्रुवक कर्ण के खण्ड ही होंगे; इसलिये यह भी कह सकते हो कि ये दोनों प्रधान कर्ण से विरुद्ध दिशा में तुल्य अन्तर पर रहते हैं।

तद्रूप कनिष्ठफल—प्रत्येक दो दो संबद्ध ध्रुव जहाँ आपस में तुल्य होते हैं उसे तद्रूप कनिष्ठफल कहते हैं।

(१) दोनों संबद्ध ध्रुवों के पूरक जो प्रथम लघु कनिष्ठ-फल होंगे वे आपस में तुल्य होंगे। क्योंकि प्रथम ध्रुव को प्रधान स्थान में ले जाने के लिये जै बार तिर्यक् और ऊर्ध्वा-धर पंक्तिओं को हटाना पड़ेगा उतने ही बार दूसरे ध्रुव को प्रधान स्थान में ले जाने के लिये हटाना पड़ेगा। या दोनों को प्रधान स्थान में ले आने के लिये तिर्यक् और ऊर्ध्वाधर पंक्ति-ओं का एक ही परिवर्त्तन होगा।

(२) तद्रूप कनिष्ठफल में स्पष्ट है कि प्रधान लघु कनिष्ठ-फल भी सब तद्रूप कनिष्ठफल होंगे क्योंकि प्रधान स्थान अ, से जितने अक्षर ऊर्ध्वाधर और तिर्यक् में लेकर वर्ग बनाओगे उसके पूरक में अवशिष्ट संबद्ध ध्रुव जो कि आपस में तुल्य हैं, रहेंगे।

(३) (१) से यह भी सिद्ध होता है कि संबद्ध ध्रुवों के पूरक प्रथम कनिष्ठफल के तुल्य होने से उत्क्रम कनिष्ठफल में भी तत्स्थानीय ध्रुव तुल्य होंगे क्योंकि जो पूरक हैं वही उत्क्रम में तत्स्थानीय ध्रुव होते हैं; इसलिये उत्क्रम कनिष्ठफल भी एक तद्रूप कनिष्ठफल होगा।

उदाहरण

१।

$$\text{कफ} = \begin{vmatrix} \text{अ} & \text{ह} & \text{ग} \\ \text{ह} & \text{क} & \text{फ} \\ \text{ग} & \text{फ} & \text{ख} \end{vmatrix}$$

इसके उत्क्रम कनिष्ठफल का मान बताओ।

१८७वें प्रक्रम में जो आ$_1$, आ$_2$ .... हैं उनके स्थान में यहां लघु अक्षर संबन्धी उनके मान क्रम से आ हा गा फा इत्यादि मानो तो १८७ प्रक्रम से

कफ = अआ + हहा + गगा = हहा + कका + फफा = गगा + फफा + खखा; इसलिये उत्क्रम में आ, हा, गा, हा, का, फा, गा, फा, खा ये ध्रुव हुए तब

$$\text{उकफ} = \begin{vmatrix} \text{आ} & \text{हा} & \text{गा} \\ \text{हा} & \text{का} & \text{फा} \\ \text{गा} & \text{फा} & \text{खा} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{कख} - \text{फ}^2 & \text{फग} - \text{खह} & \text{हफ} - \text{कग} \\ \text{फग} - \text{खह} & \text{खअ} - \text{ग}^2 & \text{गह} - \text{अफ} \\ \text{हफ} - \text{कग} & \text{गह} - \text{अफ} & \text{अक} - \text{ह}^2 \end{vmatrix}$$

२। इसी प्रकार, १८७ प्रक्रम से और (१) उदाहरण के सङ्केत से

$$\text{कफ} = \begin{vmatrix} \text{अ} & \text{ह} & \text{ग} & \text{त} \\ \text{ह} & \text{क} & \text{फ} & \text{म} \\ \text{ग} & \text{फ} & \text{ख} & \text{न} \\ \text{त} & \text{म} & \text{न} & \text{ग} \end{vmatrix} \begin{array}{l} = \text{अआ} + \text{हहा} + \text{गगा} + \text{तता} \\ = \text{हहा} + \text{कका} + \text{फफा} + \text{ममा}, \\ = \text{इत्यादि} \end{array}$$

अब आ, हा, इत्यादि पर से इसके उत्क्रम का मान निकाल लो। इस कनिष्ठफल का मान १९० प्रक्रम की युक्ति से अन्तिम ऊर्ध्वाधर और तिर्यक् पंक्तिस्थ दो दो ध्रुवों के गुणनफल के रूप में ले आओ तो

$$\text{कफ} = \text{ग}\begin{vmatrix} \text{अ} & \text{ह} & \text{ग} \\ \text{ह} & \text{क} & \text{क} \\ \text{ग} & \text{फ} & \text{ख} \end{vmatrix} - \text{आत}^{2} - \text{काम}^{2} - \text{खान}^{2} - 2\text{फामन} - 2\text{गानत} - 2\text{हातम} \text{ ।}$$

३। दूसरे उदाहरण में अन्त में एक ऊर्ध्वाधर पंक्ति और उन्हीं अक्षरों के यथा स्थानक निवेश से एक तिर्यक् पंक्ति और बढ़ा दो तो स्पष्ट है कि पंक्ति में एक अक्षर बढ़ जाने से जो कनिष्ठफल होगा वह भी तद्रूप कनिष्ठफल ही होगा।

इसलिये १९० प्रक्रम की युक्ति और (२) उदाहरण के सङ्केत से

$$\text{कफ} = \begin{vmatrix} \text{अ} & \text{ह} & \text{ग} & \text{त} & \text{अ}' \\ \text{ह} & \text{क} & \text{फ} & \text{म} & \text{ह}' \\ \text{ग} & \text{फ} & \text{ख} & \text{न} & \text{ग}' \\ \text{त} & \text{म} & \text{न} & \text{ग} & \text{त}' \\ \text{अ}' & \text{ह}' & \text{ग}' & \text{त}' & 0 \end{vmatrix} = \text{आअ}'^{2} - \text{काह}'^{2} - \text{खाग}'^{2} - \text{गात}'^{2} - 2\text{फाह}'\text{ग}' - 2\text{गाग}'\text{अ}' - 2\text{हाअ}'\text{ह}' - 2\text{ताअ}'\text{ग}' - 2\text{माह}'\text{त}' - 2\text{नाग}'\text{त}'$$

४। सिद्ध करो कि किसी प्रधान ध्रुव का संबद्ध ध्रुव वही प्रधान ध्रुव है।

५। सिद्ध करो कि कनिष्ठफल का वर्ग एक तद्रूप कनिष्ठफल होगा।

२०१—विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल और विजातीय कनिष्ठफल—

यदि तद्रूप कनिष्ठफल में प्रत्येक ध्रुव अपने संबद्ध ध्रुव के संख्यात्मक मान में तुल्य और विपरीत चिन्ह के हों तो इसे विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल कहते हैं। किसी प्रधान ध्रुव

का संबद्ध ध्रुव वही प्रधान ध्रुव होता है; इसलिये वह जब तक शून्य न हो तब तक उसी संख्या के तुल्य और विपरीत चिन्ह का कैसे हो सकता है; इसलिये विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल में सब प्रधान ध्रुव शून्य होंगे। इसलिये विजातीय तद्रूप कनिष्ठ-फल को निरत्त कनिष्ठफल कह सकते हैं (१८३ प्र० देखो)

जिस कनिष्ठफल में प्रधान ध्रुवों को छोड़ कर और प्रत्येक ध्रुव अपने संबद्ध ध्रुव के संख्यात्मक मान के तुल्य और विपरीत चिन्ह के होते हैं उसे विजातीय कनिष्ठफल कहते हैं।

१८६ वें प्रक्रम की युक्ति से किसी विजातीय कनिष्ठफल के मान को विजातीय तद्रूप कनिष्ठफलों के योग रूप में जान सकते हो। इसलिये विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल के विषय में कुछ विशेष दिखलाते हैं।

(१) जिस विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल में ऊर्ध्वाधर वा तिर्यक् पंक्ति विषम होती है उसका मान शून्य के तुल्य होता है।

क्योंकि किसी विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल में यदि ऊर्ध्वा-धर को तिर्यक् और तिर्यक् पंक्तिओं को ऊर्ध्वाधर रूप में बदल दें और प्रत्येक तिर्यक् पंक्ति के चिन्ह को बदल दें तो उसके मान में कुछ भेद न होगा अर्थात् फिर प्रत्येक पंक्ति में चिन्ह समेत अक्षर ज्यों के त्यों रहेंगे। परन्तु विषम अक्षरों के चिन्ह बदल देने से अब तो इन अक्षरों से पद बनेंगे पहिले पद से विपरीत चिन्ह के होंगे; इसलिये

कफ = −कफ ∴ २ कफ = ०

अर्थात् कफ = ०। जैसे

$$\text{कफ} = \begin{vmatrix} 0 & \text{अ} & \text{क} \\ -\text{अ} & 0 & \text{ख} \\ -\text{क} & -\text{ख} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

(२) विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल का उत्क्रम कनिष्ठफल एक विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल होगा। यदि पंक्ति सम अर्थात् प्रत्येक पंक्ति में सम वर्ण हों और यदि विषम वर्ण हों तो एक तद्रूप कनिष्ठफल होगा क्योंकि किसी विजातीय तद्रूप कनिष्ठ-फल के एक जोड़े संवद्ध ध्रुव के लघु कनिष्ठफलों के चिन्ह में वही भेद होगा जो कि तिर्यक् और ऊर्ध्वाधर पंक्तिओं के परिवर्त्तन और सब ध्रुवों के चिन्हों में होगा। इसलिये यदि लघु कनिष्ठफलों में सम पंक्ति अर्थात् मुख्य विजातीय तद्रूप में विषमाक्षर स्थिति हो तो वे दोनों तुल्य होंगे और वे ही दोनों तत्स्थानीय उत्क्रम कनिष्ठफल में ध्रुव होंगे; इसलिये उत्क्रम कनिष्ठफल एक तद्रूप कनिष्ठफल होगा। और यदि मुख्य विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल में समाक्षर की स्थिति हो तो दोनों लघु कनिष्ठफल संख्या में समान और विपरीत चिन्ह के होंगे; इसलिये उत्क्रम कनिष्ठफल भी एक विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल होगा जिसके कर्णगत प्रधान ध्रुव सब विषमाक्षर सम्बन्धी विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल होंगे।

(३) समाक्षर सम्बन्धी विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल एक वर्ग संख्या होगी अर्थात् जिसका पूरा पूरा वर्ग मूल मिलेगा। जैसे चार अक्षर सम्बन्धी विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल में

$$\text{कफ} = \begin{vmatrix} 0 & \text{अ} & \text{क} & \text{ख} \\ -\text{अ} & 0 & \text{ग} & \text{घ} \\ -\text{क} & -\text{ग} & 0 & \text{फ} \\ -\text{ख} & -\text{क} & -\text{फ} & 0 \end{vmatrix}$$

इसमें मान लो कि उत्क्रम कनिष्ठफल के ध्रुव मान $आ_1$, $का_1$ .... $आ_2$ इत्यादि हैं तो २९९ प्रक्रम के (२) से

$$आ_1 का_2 - आ_2 का_1 = कफ \begin{vmatrix} 0 & फ \\ -फ & 0 \end{vmatrix} = फ^2 कफ$$

परन्तु $आ_1$ और $का_2$ के विषमान्तर सम्बन्धी विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल होने के कारण शून्य होने से और $आ_2$ और $का_1$ के एक विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल में परस्पर सम्बद्ध ध्रुव होने से $आ_1 का_2 - आ_2 का_1$

$$= 0 - आ_2 \times - आ_2$$
$$= आ_2^2$$
$$= फ^2 \cdot कफ$$

इसलिये कफ एक पूरो वर्ग संख्या हुई। इसी प्रकार समान्तर स्थिति के विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल जो कि अभी वर्ग संख्या सिद्ध हुआ है उसका और मुख्य कनिष्ठफल का घात वर्ग संख्या सिद्ध होगा अर्थात् छः अन्तर सम्बन्धी विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल भी पूरा पूरा वर्ग सिद्ध होगा। इसी प्रकार आगे सब समान्तर सम्बन्धी विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल पूरे पूरे होते जायंगे।

उदाहरण

१।

$$कफ = \begin{vmatrix} य & अ & क & ख \\ -अ & य & ग & घ \\ -क & -ग & य & फ \\ -ख & -घ & -फ & य \end{vmatrix}$$

इसको य की घात वृद्धि में ले आओ। १८४ प्रक्रम से और २०१ प्रक्रम के (१) से

$$\text{कफ} = (\text{अफ} - \text{कख} + \text{खग})^{२} + (\text{अ}^{२} + \text{क}^{२} + \text{ख}^{२} + \text{ग}^{२} + \text{घ}^{२} + \text{फ}^{२})\,\text{य}^{२} + \text{य}^{४}$$

२। सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} \text{आ} & \text{अ} & \text{क} & \text{ख} & \text{ग} \\ -\text{अ} & \text{का} & \text{घ} & \text{ङ} & \text{च} \\ -\text{क} & -\text{घ} & \text{खा} & \text{छ} & \text{ज} \\ -\text{ख} & -\text{ङ} & -\text{छ} & \text{गा} & \text{झ} \\ -\text{ग} & -\text{च} & -\text{ज} & -\text{झ} & \text{घा} \end{vmatrix}$$

$$= \text{आ का गा घा} + \text{यौ झ}^{२}\ \text{आ का गा} + \text{यौ}\,(\text{घझ} - \text{ङग} + \text{चछ})^{२}\,\text{आ}$$

३। दो दो ऊर्ध्वाधर पंक्तिओं के बदल देने से और एकान्तर दो ऊर्ध्वाधर पंक्तिस्थ ध्रुवों को −१ से गुण देने से

$$\begin{vmatrix} \text{अ}_{१} & \text{क}_{१} & \text{ख}_{१} & \text{ग}_{१} \\ \text{अ}_{२} & \text{क}_{२} & \text{ख}_{२} & \text{ग}_{२} \\ \text{अ}_{३} & \text{क}_{३} & \text{ख}_{३} & \text{ग}_{३} \\ \text{अ}_{४} & \text{क}_{४} & \text{ख}_{४} & \text{ग}_{४} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -\text{क}_{१} & \text{अ}_{१} & -\text{ग}_{१} & \text{ख}_{१} \\ -\text{क}_{२} & \text{अ}_{२} & -\text{ग}_{२} & \text{ख}_{२} \\ -\text{क}_{३} & \text{अ}_{३} & -\text{ग}_{३} & \text{ख}_{३} \\ -\text{क}_{४} & \text{अ}_{४} & -\text{ग}_{४} & \text{ख}_{४} \end{vmatrix}$$

$$= \text{कफ}$$

∴ इन दोनों के गुणनफल से

$$\begin{vmatrix} ०, & -(अ_१क_२)-(ख_१ग_२), & -(अ_१क_३)-(ख_१ग_३), & -(अ_१क_४)-(ख_१ग_४) \\ (अ_१क_२)+(ख_१ग_२), & ०, & -(अ_२क_३)-(ख_२ग_३), & -(अ_२क_४)-(ख_२ग_४) \\ (अ_१क_३)+(ख_१ग_३), & (अ_२क_३)+(ख_२ग_३), & ०, & -(अ_३क_४)-(ख_३ग_४) \\ (अ_१क_४)+(ख_१ग_४), & (अ_२क_४)+(ख_२ग_४), & (अ_३क_४)+(ख_३ग_४), & ०, \end{vmatrix}$$

इस पर से सिद्ध होता है कि किसी कनिष्ठफल के वर्ग को एक विजातीय कनिष्ठफल के रूप में ला सकते हैं।

$$४। \quad \begin{vmatrix} ० & अ & क \\ -अ & ० & ख \\ -क & -ख & ० \end{vmatrix}$$

इस विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल का उत्क्रम कनिष्ठफल निकालो।

$आ_१, का_१, खा_१$ इत्यादि का मान निकालने से

$$उत्क्रम\ कनिष्ठफल = \begin{vmatrix} ख^२ & -कख & अख \\ -कख & क^२ & -अक \\ अख & -अक & अ^२ \end{vmatrix}$$

$$= ख \begin{vmatrix} ख & -कख & अख \\ -क & क^२ & -अक \\ अ & -अक & अ^२ \end{vmatrix}$$

$$= ख^{2} \begin{vmatrix} १ & -क & अ \\ -१ & क & -अ \\ १ & -क & -अ \end{vmatrix}$$

५। चार अक्षर सम्बन्धी पंक्ति के विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल के उत्क्रम कनिष्ठफल का मान बताओ।

(१) उदाहरण में य = ० तो विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल हो जायगा।

$$\text{उसमें कफ} = (\text{अफ} - \text{कख} + \text{खग})^{2}$$

$$= व^{2} \qquad \text{तो}$$

$$\text{उत्क्रम कनिष्ठफल} = \begin{vmatrix} ० & फव & -घव & गव \\ -फव & ० & खव & -कव \\ घव & -खव & ० & अव \\ -गव & कव & अव & ० \end{vmatrix}$$

२०३। यदि कोई कनिष्ठफल का मान शून्य हो और उसमें गोटे के ऐसा तिर्यक् और ऊर्ध्वाधर रूप जैसे अ०, अ′, क′, ख′, ग′,......अ″, क″, ख″, ग″......और अक्षर जोड़ दिए जांय जिससे प्रत्येक पंक्ति में एक अक्षर के बढ़ जाने से एकाधिकाक्षर पंक्ति का एक नया कनिष्ठफल बन जाय तो इस नये कनिष्ठफल (= कफ′) और प्रथम कनिष्ठफल (= कफ) के प्रथम प्रधान ध्रुव के वश से जो प्रथम प्रधान लघु कनिष्ठफल $आ_{१}$ होगा उनका गुणनफल अर्थात्

$$आ_{१}\text{कफ}' \text{ यह } -'(आ_{१}अ' + का_{१}क' + खा_{१}ख' + \cdots\cdots)$$
$$(आ_{१}अ'' + आ_{२}क'' + आ_{३}ख'' + \cdots\cdots)$$

इसके तुल्य होगा। $आ_1$, $का_1$, $खा_1$ ... । $आ_2$, $आ_3$, पहिले कनिष्ठफल सम्बन्धी की संख्यायें हैं जो कि १८७वें प्रक्रम में हैं।

यह ऊपर की बात १९९ वें प्रक्रम के (२) से सहज में सिद्ध होती है। यदि कक' के उत्क्रम कनिष्ठफल में $अ_0$, अ', अ'', $अ_1$ सम्बन्धी जो चार ध्रुवक हैं इनसे जो दो अक्षर की पंक्ति के कनिष्ठफल होंगे उसे प्रथम दिए हुए कनिष्ठफल के ध्रुवों के रूप में ले आओ।

यदि दिया हुआ कनिष्ठफल जिसका मान तद्रूप कनिष्ठफल हो और दोनों ओर अक्षरों के जोड़ने से नया भी एक तद्रूप कनिष्ठफल हो तो ऊपर के समीकरण में दाहिनी ओर के दोनों गुण्य गुणक रूप खण्ड के तुल्य होने से एक वर्ग राशि उत्पन्न होगी।

इस पर से यह सिद्ध होता है कि ऐसे नये तद्रूप कनिष्ठफल को उसके दूसरे प्रथम लघु कनिष्ठफल से गुण दें तो गुणनफल जोड़े हुए अक्षरों से बना हुआ जो घातिकफल होगा उसके वर्गात्मक संख्या के समान विपरीत चिन्ह का होगा। अर्थात् ऐसी स्थिति में नया तद्रूप कनिष्ठफल और उसका प्रधान दूसरा लघु कनिष्ठफल विरुद्ध चिन्ह के होंगे।

उदाहरण

१। सिद्ध करो कि पञ्चान्तर पंक्ति के विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल का उत्क्रम कनिष्ठफल

$$\begin{vmatrix} फ^{२}_{१} & फ_{१}फ_{२} & फ_{१}फ_{३} & फ_{१}फ_{४} & फ_{१}फ_{५} \\ फ_{२}फ_{१} & फ^{२}_{२} & फ_{२}फ_{३} & फ_{२}फ_{४} & फ_{२}फ_{५} \\ फ_{३}फ_{१} & फ_{३}फ_{२} & फ^{२}_{३} & फ_{३}फ_{४} & फ_{३}फ_{५} \\ फ_{४}फ_{१} & फ_{४}फ_{२} & फ_{४}फ_{३} & फ^{२}_{४} & फ_{४}फ_{५} \\ फ_{५}फ_{१} & फ_{५}फ_{२} & फ_{५}फ_{३} & फ_{५}फ_{४} & फ^{२}_{५} \end{vmatrix}$$

यह होगा ।

जहां $फ_{१}$, $फ_{२}$, $फ_{३}$, $फ_{४}$ और $फ_{५}$ ध्रुवों के द्विघात के फल हैं और जिनके वर्ग क्रम से पांचों प्रधान ध्रुव संबन्धी पूरक प्रथम लघु कनिष्ठफल हैं। २०२वें प्रक्रम का अन्तिम उदाहरण देखो ।

२ । सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} ० & अ' & क' & ख' \\ अ'' & ० & ख & -क \\ क'' & -ख & ० & अ \\ ख'' & क & -अ & ० \end{vmatrix}$$

$$= -(अअ' + कक' + खख')(अअ'' + कक'' + खख'')$$

३ । सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} ० & अ' & क' & ख' & ग' \\ अ'' & ० & ख & -क & य \\ क'' & -ख & ० & अ & र \\ ख'' & क & -अ & ० & ल \\ ग'' & -य & -र & -ल & ० \end{vmatrix}$$

$$= (अय + कर + खल)\{य(क'ख'') + र(ख'अ'') + ल(अ'क'') + अ(अ'ग'') + क(क'ग'') + ख(ख'ग'')\}$$

अभ्यास के लिये प्रश्न

१। सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} क+२ख & ख+अ & अ+क \\ क'+२ख' & ख'+अ' & अ'+क' \\ क''+२ख'' & ख''+अ'' & अ''+क'' \end{vmatrix} = ३\begin{vmatrix} अ & क & ख \\ अ' & क' & ख' \\ अ'' & क'' & ख'' \end{vmatrix}$$

२। सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} कख & १ & क+ख \\ खग & १ & ख+ग \\ कग & १ & क+ग \end{vmatrix} = -(क-ख)(ख-ग)(क-ग)$$

३। सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} १ & क^२ग^२+अ^२घ^२ & कग+अघ \\ १ & अ^२ग^२+क^२घ^२ & अग+कघ \\ १ & अ^२क^२+ग^२घ^२ & अक+गघ \end{vmatrix}$$

$$=(क-ग)(अ-घ)(ग-अ)(क-घ)(अ-क)(ग-घ)$$

पहिली ऊर्ध्वाधर पंक्ति के ध्रुवों को २अगकघ से गुण कर दूसरे ऊर्ध्वाधर में जोड़ दो तो १८४ प्रक्रम के ८ वां उदाहरण का रूप हो जायगा।

४। सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} (\text{क}+\text{ख}-\text{अ}-\text{घ})^{\text{४}} & (\text{क}+\text{ख}-\text{अ}-\text{घ})^{\text{२}} & \text{१} \\ (\text{ख}+\text{अ}-\text{क}-\text{घ})^{\text{४}} & (\text{ख}+\text{अ}-\text{क}-\text{घ})^{\text{२}} & \text{१} \\ (\text{अ}+\text{क}-\text{ख}-\text{घ})^{\text{४}} & (\text{अ}+\text{क}-\text{ख}-\text{घ})^{\text{२}} & \text{१} \end{vmatrix}$$

$$= \text{६४}(\text{क}-\text{ख})(\text{अ}-\text{घ})(\text{ख}-\text{अ})(\text{क}-\text{घ})(\text{अ}-\text{क})(\text{ख}-\text{घ})$$

यह ठीक १८४ प्रक्रम के ८वां उदाहरण ऐसा है यदि $\text{अ}' = (\text{क}+\text{ख}-\text{अ}-\text{घ})^{\text{२}}$ इत्यादि मान लो तो

५। सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} \text{अ} & \text{क} & \text{अय}+\text{क} \\ \text{क} & \text{ख} & \text{कय}+\text{ख} \\ \text{अय}+\text{क} & \text{कय}+\text{ख} & \text{०} \end{vmatrix}$$

$$= -(\text{अख}-\text{क}^{\text{२}})(\text{अय}^{\text{२}}+\text{२कय}+\text{ग})$$

पहिली तिर्यक् पंक्ति को य से गुण कर दूसरी में जोड़ो, योग को तीसरी में घटा दो तो मान सहज में आ जायगा।

६। ऊपर के उदाहरण के ऐसा सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} \text{अ} & \text{क} & \text{ख}, & \text{अय}^{\text{२}}+\text{२कय}+\text{ख} \\ \text{क} & \text{ख} & \text{ग}, & \text{कय}^{\text{२}}+\text{२खय}+\text{ग} \\ \text{ख} & \text{ग} & \text{घ}, & \text{खय}^{\text{२}}+\text{२गय}+\text{घ} \\ \text{अय}^{\text{२}}+\text{२कय}+\text{ख}, & \text{कय}^{\text{२}}+\text{२खय}+\text{ग}, & \text{खय}^{\text{२}}+\text{२गय}+\text{घ} & \text{०} \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} \text{अ} & \text{क} & \text{ख} \\ \text{क} & \text{ख} & \text{ग} \\ \text{ख} & \text{ग} & \text{घ} \end{vmatrix} (\text{अय}^{\text{४}}+\text{४कय}^{\text{३}}+\text{६खय}^{\text{२}}+\text{४गय}+\text{घ})$$

७। सिद्ध करो कि

$$\equiv \begin{vmatrix} \text{अ}_{१}\text{य}+\text{क}_{१}, & \text{क}_{१}\text{य}+\text{ख}_{१}, & \text{ख}_{१}\text{य}+\text{ग}_{१} \\ \text{अ}_{२}\text{य}+\text{क}_{२}, & \text{क}_{२}\text{य}+\text{ख}_{२}, & \text{ख}_{२}\text{य}+\text{ग}_{२} \\ \text{अ}_{३}\text{य}+\text{क}_{३}, & \text{क}_{३}\text{य}+\text{ख}_{३}, & \text{ख}_{३}\text{य}+\text{ग}_{३} \end{vmatrix}$$

$$\equiv \begin{vmatrix} १ & ० & ० & ० \\ \text{अ}_{१} & \text{अ}_{१}\text{य}+\text{क}_{१} & \text{क}_{१}\text{य}+\text{ख}_{१} & \text{ख}_{१}\text{य}+\text{ग}_{१} \\ \text{अ}_{२} & \text{अ}_{२}\text{य}+\text{क}_{२} & \text{क}_{२}\text{य}+\text{ख}_{२} & \text{ख}_{२}\text{य}+\text{ग}_{२} \\ \text{अ}_{३} & \text{अ}_{३}\text{य}+\text{क}_{३} & \text{क}_{३}\text{य}+\text{ख}_{३} & \text{ख}_{३}\text{य}+\text{ग}_{३} \end{vmatrix}$$

८। सिद्ध करो यदि

$$\text{फ}_{१}(\text{य}) = \text{अ}_{१}\text{य}^{३} + ३\text{क}_{१}\text{य}^{२} + ३\text{ख}_{१}\text{य} + \text{ग}_{१}$$
$$\text{फ}_{२}(\text{य}) = \text{अ}_{२}\text{य}^{३} + ३\text{क}_{२}\text{य}^{२} + ३\text{ख}_{२}\text{य} + \text{ग}_{२}$$
$$\text{फ}_{३}(\text{य}) = \text{अ}_{३}\text{य}^{३} + ३\text{क}_{३}\text{य}^{२} + ३\text{ख}_{३}\text{य} + \text{ग}_{३}$$

तो

$$\begin{vmatrix} \text{फ}_{१}(\text{य}), & \text{फ}_{१}'(\text{य}), & \text{फ}''_{१}(\text{य}) \\ \text{फ}_{२}(\text{य}), & \text{फ}_{२}'(\text{य}), & \text{फ}''_{२}(\text{य}) \\ \text{फ}_{३}(\text{य}), & \text{फ}''_{३}(\text{य}) & \text{फ}''_{३}(\text{य}) \end{vmatrix}$$

$$\equiv -१८ \begin{vmatrix} १ & -\text{य}, & \text{य}^{२}, & -\text{य}^{३} \\ \text{अ}_{१} & \text{क}_{१} & \text{ख}_{१} & \text{ग}_{१} \\ \text{अ}_{२} & \text{क}_{२} & \text{ख}_{२} & \text{ग}_{२} \\ \text{अ}_{३} & \text{क}_{३} & \text{ख}_{३} & \text{ग}_{३} \end{vmatrix}$$

९। सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} १ & अ & अ' & अअ' \\ १ & क & क' & कक' \\ १ & ख & ख' & खख' \\ १ & ग & ग' & गग' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} का & खा \\ का' & खा' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} खा & आ \\ खा' & आ' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} आ & का \\ आ' & का' \end{vmatrix}$$

जहां आ $=$ (क $-$ ख) (अ $-$ ग), का $=$ (ख $-$ अ) (क $-$ ग)

खा $=$ (अ $-$ क) (ख $-$ ग), आ' $=$ (क' $-$ ख') (अ' $-$ ग')

का' $=$ (ख' $-$ अ') (क' $-$ ग'), खा' $=$ (अ' $-$ क') (ख' $-$ ग')

यहां १८७ प्रक्रम की युक्ति से

आ (क'ख' $+$ अ'ग') $+$ का (ख'अ' $+$ क'ग') $+$ खा (अ'क' $+$ ख'ग') $=$ कफ और दिए हुए समीकरणों से आ $+$ का $+$ खा $=$ ० इसे क्रम से (क'ख' $+$ अ'ग'), (ख'अ' $+$ क'ग') और (अ'क' $+$ ख'ग') गुण कर कफ में घटा देने से ऊपर के सरूप समीकरण बन जायेंगे।

१०। आ, का, खा का मान फैला कर दिखाओ कि ६ वें उदाहरण का कनिष्ठफल

$$\begin{vmatrix} १ & कख + अग, & क'ख' + अ'ग' \\ १ & अख + कग, & अ'ख' + क'ग' \\ १ & अक + खग, & अ'क' + ख'ग' \end{vmatrix}$$

इसके तुल्य होगा।

११। सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} य & अ'_1 & अ'_2 & अ'_3 & १ \\ अ_1 & य & क'_1 & क'_2 & १ \\ अ_1 & क_1 & य' & ख' & १ \\ अ_1 & क_1 & ख_1 & य & १ \\ अ_1 & क_1 & ख_1 & ग_1 & १ \end{vmatrix}$$

$= (य - अ_1)(य - क_1)(य - ख_1)(य - ग_1)$

जहां कफ = ० इसमें $अ_1, क_1, ख_1, ग_1,$ अव्यक्त के मान हैं इसी प्रकार न+१ अक्षर की पंक्ति वाले कनिष्ठफल से भी सिद्ध कर सकते हो कि कनिष्ठफल

$= (य - अ_1)(य - अ_2)(य - अ_3) \cdots\cdots\cdots (य - अ_न)$

जहां फ(य) = ० इस न घात समीकरण में $अ_1$, $अ_2$ इत्यादि अव्यक्त के मान हैं।

१२। सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} अ^3 & अ & १ \\ क^3 & क & १ \\ ख^3 & ख & १ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} अ^2 & अ & १ \\ क^2 & क & १ \\ ख^2 & ख & १ \end{vmatrix} (अ + क + ख)$$

१८४ प्रक्रम का ८ वां उदाहरण और १६२ प्रक्रम का ११ वां उदाहरण देखो।

१३। सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} \text{अ}^{३} & \text{अ}^{२} & १ \\ \text{क}^{३} & \text{क}^{२} & १ \\ \text{ख}^{३} & \text{ख}^{२} & १ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{अ}^{२} & \text{अ} & १ \\ \text{क}^{२} & \text{क} & १ \\ \text{ख}^{२} & \text{ख} & १ \end{vmatrix} (\text{अक} + \text{अख} + \text{कख})$$

१४। सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} (\text{अ}-\text{अ}')^{३} & (\text{अ}-\text{क}')^{३} & (\text{अ}-\text{ख}')^{३} \\ (\text{क}-\text{अ}')^{३} & (\text{क}-\text{क}')^{३} & (\text{क}-\text{ख}')^{३} \\ (\text{ख}-\text{अ}')^{३} & (\text{ख}-\text{क}')^{३} & (\text{ख}-\text{ख}')^{३} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} १ & \text{अ} & \text{अ}^{२} \\ १ & \text{क} & \text{क}^{२} \\ १ & \text{ख} & \text{ख}^{२} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} १ & \text{अ}' & \text{अ}'^{२} \\ १ & \text{क}' & \text{क}'^{२} \\ १ & \text{ख}' & \text{ख}'^{२} \end{vmatrix}$$

$$\{ ३ \, (३\text{अकख} - \text{यौकखयौअ}' + \text{यौक}'\text{ख}'\text{यौअ} - ३\text{अ}'\text{क}'\text{ख}') \}.$$

ऊपर का कनिष्ठफल

$$\left.\begin{matrix} \text{अ},^{३} & \text{अ},^{२} & \text{अ}, & १ \\ \text{क},^{३} & \text{क},^{२} & \text{क}, & १ \\ \text{ख},^{३} & \text{ख},^{२} & \text{ख}, & १ \end{matrix}\right\} (१) \quad \left.\begin{matrix} १, & -३\text{अ}', & ३\text{अ}',^{२} & -\text{अ}'^{३} \\ १, & -३\text{क}', & ३\text{क}',^{२} & -\text{क}'^{३} \\ १, & -३\text{ख}', & ३\text{ख}',^{२} & -\text{ख}'^{३} \end{matrix}\right\} (२)$$

इन दोनों के गुणनफल से बना है (१६४ प्रक्रम देखो) इससे कनिष्ठफलों के गुणनफल रूप में मान निकाल गुण्य गुणक रूप खण्ड समझ लो।

१५। सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} १+अ_१, & १, & १, & १ \\ १, & १+अ_२, & १, & १ \\ १, & १, & १+अ_३, & १ \\ १, & १, & १, & १+अ_४ \end{vmatrix}$$

$$=अ_१अ_२अ_३अ_४\left(१+\frac{१}{अ_१}+\frac{१}{अ_२}+\frac{१}{अ_३}+\frac{१}{अ_४}\right)$$

प्रथम ऊर्ध्वाधर ध्रुवों को और ऊर्ध्वाधर ध्रुवों में क्रम से घटा कर फिर प्रथम ऊर्ध्वाधर के वश से कनिष्ठफलों का मान निकालो।

इसी प्रकार न अक्षर सम्बन्धी पंक्ति में कनिष्ठफल

$$=अ_१अ_२अ_३\cdots\cdots\cdots अ_न\left(१+यो\frac{१}{अ_१}\right)$$

१६। ऊपर ही की युक्ति से सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} अ_१ & य & य & य \\ य & अ_२ & य & य \\ य & य & अ_३ & य \\ य & य & य & अ_४ \end{vmatrix}$$

$$=फ(य)-यफ'(य)$$

जहां $फ(य)=(य-अ_१)(य-अ_२)(य-अ_३)(य-अ_४)$।

१७। १८४ प्रक्रम के ९वें उदाहरण की युक्ति से सिद्ध करो कि यदि $अ_१, अ_२, अ_३$, $फ(य)$

$$=य^३-प_१य^२+प_२य-प_३$$

$$=०$$

इसमें अव्यक्त के मान हों तो

$$\begin{vmatrix} \text{य}^3 & \text{य}^2 & \text{य} & १ \\ \text{अ}^3_1 & \text{अ}^2_1 & \text{अ}_1 & १ \\ \text{अ}^3_2 & \text{अ}^2_2 & \text{अ}_2 & १ \\ \text{अ}^3_3 & \text{अ}^2_3 & \text{अ}_3 & १ \end{vmatrix}$$

$$= -(\text{अ}_2 - \text{अ}_3)(\text{अ}_3 - \text{अ}_1)(\text{अ}_1 - \text{अ}_2)\,\text{फ}(\text{य})$$

१८। ऊपर के कनिष्ठफल का मान सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} \text{अ}^2_1 & \text{अ}_1 & १ \\ \text{अ}^2_2 & \text{अ}_2 & १ \\ \text{अ}^2_3 & \text{अ}_3 & १ \end{vmatrix} \text{य}^3 - \begin{vmatrix} \text{अ}^3_1 & \text{अ}_1 & १ \\ \text{अ}^3_2 & \text{अ}_2 & १ \\ \text{अ}^3_1 & \text{अ}_3 & १ \end{vmatrix} \text{य}^2 + \begin{vmatrix} \text{अ}^3_1 & \text{अ}^2_1 & १ \\ \text{अ}^3_2 & \text{अ}^2_2 & १ \\ \text{अ}^3_3 & \text{अ}^2_3 & १ \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} \text{अ}^3_1 & \text{अ}^2_1 & \text{अ}_1 \\ \text{अ}^3_2 & \text{अ}^2_2 & \text{अ}_2 \\ \text{अ}^3_3 & \text{अ}^2_3 & \text{अ}_3 \end{vmatrix}$$

इसके तुल्य होगा जो कि

$$\begin{vmatrix} \text{अ}^2_1 & \text{अ}_1 & १ \\ \text{अ}^2_2 & \text{अ}_2 & १ \\ \text{अ}^2_3 & \text{अ}_3 & १ \end{vmatrix} (\text{य}^3 - \text{प}_1, \text{य}^2 + \text{प}_2 \text{य} - \text{प}_3)$$

यदि य^3, य^2, य, इत्यादि के गुणक रूप कनिष्ठफलों को कफ, कफ_1, कफ_2, कफ_3 कहो और पिछले कनिष्ठफल को कफ_4 तो सरूप समीकरण की युक्ति से

$$\text{प}_1 = \frac{\text{कफ}_1}{\text{कफ}_4},\ \text{प}_2 = \frac{\text{कफ}_2}{\text{कफ}_4},\ \text{प}_3 = \frac{\text{कफ}_3}{\text{कफ}_4}$$

१९। सिद्ध करो कि न अक्षरों की पंक्ति में

$$\begin{vmatrix} य & अ & अ & \cdot & अ \\ अ & य & अ & \cdot & अ \\ अ & अ & य & \cdot & अ \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ अ & अ & अ & \cdot & य \end{vmatrix}$$

$$= (य - अ)^{न-१} \{ य + अ (न - १) \}$$

२०। सिद्ध करो कि यदि $फ_१$, $फ_२$ और $फ_३$ अकरणी-गत घन अ भिन्न फल हो तो

$$\begin{vmatrix} फ_१(अ), & फ_२(अ), & फ_३(अ) \\ फ_१(क), & फ_२(क), & फ_३(क) \\ फ_१(ख), & फ_२(ख), & फ_३(ख) \end{vmatrix}$$

यह (क − ख) (ख − अ) (अ − क) इससे अवश्य निः-शेष होगा।

२१। दिखलाओ कि कब $अय^२ + कर^२ + खल^२ + २\ फरल + २\ गलय + २\ हयर$ यह $(अ_१ य + क_१ र + ख_१ ल)$ $(अ'_१ य + क'_१ र + ख'_१ ल)$ इसके समान होगा।

यहां दोनों गुण्य गुणक रूप खण्डों के गुणन से और ऊपर के फल के साथ तुलना करने से

$$\begin{vmatrix} अ_१ & अ'_१ & ० \\ क_१ & क'_१ & ० \\ ख_१ & ख'_१ & ० \end{vmatrix} \begin{vmatrix} अ'_१ & अ_१ & ० \\ क'_१ & क_१ & ० \\ ख'_१ & ख_१ & ० \end{vmatrix} = २ \begin{vmatrix} अ & ह & ग \\ ह & क & फ \\ ग & फ & ख \end{vmatrix} = ०$$

ऐसी स्थिति होगी। इसलिये जहां अ, क, इत्यादि से ऊपर का तद्रूप कनिष्ठफल बन जाय वहां गुण्य गुणक रूप के खण्डों में दिया हुआ ध्रुवशक्तिक फल हो सकता है।

२२।
$$\begin{vmatrix} अ_{१} & अ_{२} & अ_{३} & अ_{४} & अ_{५} \\ अ_{५} & अ_{१} & अ_{२} & अ_{३} & अ_{४} \\ अ_{४} & अ_{५} & अ_{१} & अ_{२} & अ_{३} \\ अ_{३} & अ_{४} & अ_{५} & अ_{१} & अ_{२} \\ अ_{२} & अ_{३} & अ_{४} & अ_{५} & अ_{१} \end{vmatrix}$$

इसके गुण्य गुणक रूप खण्डों को बताओ।

मान लो कि $य^{५} - १ = ०$ इसमें अव्यक्त मान क्रम से $प, प^{२}, प^{३}, प^{४}, प^{५} = १$ हैं। द्वितीय ऊर्ध्वाधर ध्रुवों को पहिले क्रम से प्रथम ऊर्ध्वाधर ध्रुवों में जोड़ देने से फिर $प, प^{२}, प^{३}, प^{४}$ से क्रम से गुण कर पहिले ऊर्ध्वाधर ध्रुवों में जोड़ देने से १६२वें प्रकम के १३ वें उदाहरण की युक्ति से सिद्ध कर सकते हो कि गुण खण्ड

$$\begin{vmatrix} अ_{१} + अ_{२} + अ_{३} + अ_{४} + अ_{५} \\ अ_{१} + पअ_{२} + प^{२}अ_{३} + प^{३}अ_{४} + प^{४}अ_{५} \\ अ_{१} + प^{२}अ_{२} + प^{४}अ_{३} + प\,अ_{४} + प^{३}अ_{५} \\ अ_{१} + प^{३}अ_{२} + प\,अ_{३} + प^{४}अ_{४} + प^{२}अ_{५} \\ अ_{१} + प^{४}अ_{२} + प^{३}अ_{३} + प^{२}अ_{४} + प\,अ_{५} \end{vmatrix}$$

ये होंगे।

इस प्रकार से जिस कनिष्ठफल में अक्षरों का विन्यास पंक्तिओं में होता है उस कनिष्ठफल के ध्रुवों को चक्रवाल ध्रुव कहते हैं।

यदि प्रति पंक्ति में न अक्षर के निवेश से चक्रवाल ध्रुव संबन्धी कनिष्ठफल हो तो वहां भी ऊपर ही की युक्ति से $\text{य}^{\text{न}} - १ = ०$ इसके सब अव्यक्त मान से गुण्य गुणक खण्डों का पता लगा सकते हो।

२३।
$$\begin{vmatrix} \text{अ}_{\text{न}} & \text{क}_{\text{न}} & ० & ० & ० & \cdot \\ -१ & \text{अ}_{\text{न}-१} & \text{क}_{\text{न}-१} & ० & ० & \cdot \\ ० & -१ & \text{अ}_{\text{न}-२} & \text{क}_{\text{न}-२} & ० & \cdot \\ ० & ० & -१ & \text{अ}_{\text{न}-३} & \text{क}_{\text{न}-३} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

इसका मान बताओ। जहां प्रथम प्रधान ध्रुव के आगे एक ध्रुव संख्यात्मक और बाकी प्रधान ध्रुवों के आगे एक एक संख्यात्मक ध्रुव और पीछे -१ ध्रुव हैं। अवशिष्ट सब ध्रुव शून्य है। कनिष्ठफल को यदि $\text{फ}_{\text{न}}$ और प्रथम ऊर्ध्वाधर ध्रुवों के रूप में $\text{फ}_{\text{न}}$ के मान में $\text{अ}_{\text{न}}$, और $\text{क}_{\text{न}}$ ध्रुवों के वश जो प्रथम लघु कनिष्ठफल $\text{न} - १$ और $\text{न} - २$ अक्षर के पंक्ति का हों तो उन्हें क्रम से $\text{फ}_{\text{न}-१}$ और $\text{फ}_{\text{न}-२}$ कहो तो

$$\text{फ}_{\text{न}} = \text{अ}_{\text{न}}\text{फ}_{\text{न}-१} + \text{क}_{\text{न}}\text{फ}_{\text{न}-२}।$$

यदि $\text{न} = १$, $\text{फ}_{१} = \text{अ}_{१}$, $\text{न} = २$ तो $\text{फ}_{२} = \text{अ}_{२}\text{अ}_{१} + \text{क}_{१}$। अब इन दोनों के उत्थापन देने से ऊपर के समीकरण के बल से $\text{फ}_{३}\text{फ}_{४}$ इत्यादि के मान जान सकते हो।

ऊपर के $\text{फ}_{\text{न}}$ के मान में $\text{फ}_{\text{न}-१}$ का भाग देने से

$$\frac{\text{फ}_{\text{न}}}{\text{फ}_{\text{न}-१}} = \text{अ}_{\text{न}} + \cfrac{\text{क}_{\text{न}}}{\cfrac{\text{फ}_{\text{न}-१}}{\text{फ}_{\text{न}-२}}}$$

इसमें न के स्थान में न — १, के उत्थापन से

$$\frac{फ_{न-१}}{फ_{न-२}} = अ_{न-१} + \frac{क_{न-१}}{\frac{फ_{न-२}}{फ_{न-३}}}$$

यों बार बार क्रिया करने से

$$\therefore \frac{फ_{न}}{फ_{न-१}} = अ_{न} + \frac{क_{न}}{\frac{फ_{न-१}}{फ_{न-२}}}$$

$$= अ_{न} + \cfrac{क_{न}}{अ_{न-१} + \cfrac{क_{न-१}}{\frac{फ_{न-२}}{फ_{न-३}}}}$$

$$= अ_{न} + \cfrac{क_{न}}{अ_{न-१} + \cfrac{क_{न-१}}{अ_{न-२} + \cfrac{क_{न-२}}{\frac{फ_{न-३}}{फ_{न-४}}}}}$$

इस प्रकार $\frac{फ_{न}}{फ_{न-१}}$ का मान एक वितत भिन्न के रूप में ला सकते हो।

२४।

$$फ_{न} = \begin{vmatrix} अ & १ & ० & ० & ० & . \\ क & अ & १ & ० & ० & . \\ ० & क & अ & १ & ० & . \\ ० & ० & क & अ & १ & . \\ . & . & . & . & . & . \end{vmatrix}$$

इसका मान बताओ।

यहां अ, क, १ ये ही तीन संख्यात्मक ध्रुव हैं। यहां भी ऊपर के उदाहरण ही के संकेत से

$$फ_न = अफ_{न-१} - कफ_{न-२}$$

$फ_१$ और $फ_२$ के मान यहां उदाहरण से अ और $अ^२ - क$ हैं। फिर इनके वश से ऊपर के समीकरण से $फ_३$, $फ_४$ इत्यादि के मान जान सकते हो; जैसे $फ_३ = अफ_२ - कफ_१ = अ^३ - अक - अक = अ^३ - २\,अक$। $फ_४ = अफ_३ - कफ_२ = अ^४ - २\,अ^२क - क\,(अ^२ - क) = अ^४ - ३\,अ^२क + क^२$ इसलिये साधारण से

$$फ_न = अ^न - (न-१)\,अ^{न-२}क + \frac{(न-३)\,(न-२)}{२\,!}\,अ^{न-४}क^२ - \frac{(न-५)(न-४)(न-३)}{३\,!}\,अ^{न-६}क^३ + \cdots$$

२५। $$फ_न = \begin{vmatrix} अ+य & ह & ग & \cdot \\ ह & क+य & फ & \cdot \\ ग & फ & ख+य & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

यह न अक्षर पंक्ति का तद्रूप कनिष्ठफल है। इसके मान में अ+य प्रधान ध्रुव का जो प्रधान प्रथम लघु कनिष्ठफल हो उसे $फ_{न-१}$ कहो और इसमें क+य प्रधान ध्रुव का प्रधान लघु कनिष्ठफल हो उसे $फ_{न-२}$, इसी प्रकार $फ_{न-३}$, $फ_{न-४}$ इत्यादि मानो और नीचे एक तिर्यक् पंक्ति अन्त में और एक ऊर्ध्वाधर पंक्ति भी अन्त में और ध्रुवों को बढ़ा दो जिनमें कर्ण गत प्रधान ध्रुव १ और सब शून्य हों क्यों कि ऐसा करने से कनिष्ठफलों

के मान में भेद न पड़ेगा। इस प्रकार से न+१ फल उत्पन्न होंगे जो क्रम से $फ_न$, $फ_{न-१}$, $फ_{न-२}$, $फ_{न-३}$,…$फ_२$, $फ_१$, $फ_०$ ये हैं जिनमें य के घात उनकी संख्या न, न−१ के समान हैं। ऊपर के फलों में यदि य के स्थान में +∞ का उत्थापन दो तो सब धन होंगे जहां $फ_० = १$ सर्वदा धन ही रहेगा और य के स्थान में −∞ का उत्थापन देने से $फ_०$ से गिनती करने में एकान्तर धन और ऋण होंगे; इसलिये यहां न व्यत्यास की हानि होगी।

अब यदि य का कोई ऐसा मान हो कि उसके उत्थापन से $फ_न$ और $फ_०$ को छोड़ कर और कोई शून्य हो जाय तो १२२वें प्रक्रम की युक्ति से उसके आगे और पीछे के फल विरुद्ध चिन्ह के होंगे; इसलिये ऊपर जो फलों की श्रेढी लिखी है उसमें य का मान बढ़ते बढ़ते जब तक उस मान को न लाओगे जिसमें कि $फ_न = ०$ तब तक व्यत्यास की हानि न होगी। इसलिये स्टर्म की युक्ति के ऐसा यहां −∞ और +∞ इसके बीच य के मान में न व्यत्यास की हानि होने से $फ_न = ०$ इसमें न अव्यक्त मान अर्थात् सब अव्यक्त मान संभाव्य होंगे। और फलों की श्रेढ़ी में सब फलों में वैसा ही धर्म है जैसा कि $फ_न = ०$ इसमें है। इसलिये $फ_{न-१} = ०$ इसमें भी न−१ अर्थात् सब अव्यक्त मान संभाव्य होंगे। इसी प्रकार सब फलों में भी यहां पर सब अव्यक्त मान संभाव्य होंगे।

$फ_न = ०$ इसमें संभव है कि मान समान हो। मान लो कि त मान प्रत्येक $अ_१$ के तुल्य हैं। तो $फ_{न-१} = ०$ इसमें त−१ मान प्रत्येक $अ_१$ के तुल्य होंगे। $फ_{न-२} = ०$ इसमें त−२ मान $अ_१$ के तुल्य होंगे।

२६। सिद्ध करो कि ऊपर के उदाहरण में यदि $फ_न = ०$ इसमें त मान प्रत्येक $अ_१$ के तुल्य हों तो किसी प्रथम लघु कनिष्ठफल में त − १ और किसी द्वितीय लघु कनिष्ठफल में त − २, मान प्रत्येक $अ_१$ के तुल्य होंगे।

आ, हा, गा…उत्क्रम कनिष्ठफल में तत्स्थानीय ध्रुवों को मान लो तो उत्क्रम कनिष्ठफल के वश से एक

$$आ का − हा^२ = फ_{न−२} फ_न ।$$

तिर्यक् और ऊर्ध्वाधर पंक्तिओं को हटा हटा कर रखने से यह स्पष्ट है कि प्रधान प्रथम लघु कनिष्ठफल में त − १ वार, $अ_१$ यह समान मान रहेगा। इसलिये ऊपर के समीकरण से सिद्ध कर सकते हो कि हा में भी वह मान त − १ वार आवेगा। और हा यह कोई प्रथम लघु कनिष्ठफल मान सकते हो।

२७। बताओ कैसी स्थिति में

$$\begin{vmatrix} अ+य & ह & ग \\ ह & क+य & फ \\ ग & फ & ख+य \end{vmatrix} = ०$$

इसमें य के तीनों मान समान होंगे।

जब किसी प्रथम लघु कनिष्ठफल में त मान समान वहो हों तो तीनों मान समान होंगे, इसलिये यहां ह के वश से प्रथक लघु कनिष्ठफल

$$= ह(ख + य) − गफ \therefore − य = ख − \frac{ग फ}{ह}.$$

ग के वश, प्रथम लघु कनिष्ठफल

$$=\text{ग}\,(\text{क}+\text{य})-\text{हफ}\;\therefore\;-\text{य}=\text{क}-\frac{\text{हफ}}{\text{ग}}$$

फ के वश प्रथम लघु कनिष्ठफल

$$=\text{फ}\,(\text{अ}+\text{य})-\text{हग}\;\therefore\;-\text{य}=\text{अ}-\frac{\text{हग}}{\text{फ}}$$

ये $-$ य अब सब समान होंगे तभी तीनों मान समान हो सकते हैं।

$$\text{इसलिये}\;\text{अ}-\frac{\text{हग}}{\text{फ}}=\text{क}-\frac{\text{हफ}}{\text{ग}}=\text{ख}-\frac{\text{गफ}}{\text{ह}}$$

२८। १२३ प्रक्रम में (२) प्रकार जो चतुर्घात समीकरण के लिये लिखा है उसमें जो अ, क, ख इत्यादि है उनसे दिखाओ कि।

$$\begin{vmatrix} \text{१} & \text{१} & \text{०} \\ \text{फ} & \text{प}' & \text{०} \\ \text{त} & \text{त}' & \text{०} \end{vmatrix}\;\begin{vmatrix} \text{१} & \text{१} & \text{०} \\ \text{प}' & \text{प} & \text{०} \\ \text{त}' & \text{त} & \text{०} \end{vmatrix}$$

$$\equiv\begin{vmatrix} \text{२}, & \text{प}+\text{प}', & \text{त}+\text{त}' \\ \text{प}+\text{प}', & \text{२}\,\text{प}\,\text{प}' & \text{पत}'+\text{प}'\text{त} \\ \text{त}+\text{त}', & \text{पत}'+\text{प}'\text{त}, & \text{२}\,\text{त}\,\text{त}' \end{vmatrix}=\text{०}$$

इस सरूप समीकरण से

$$\begin{vmatrix} \text{अ} & \text{क} & \text{ख}+\text{२}\,\text{अफि} \\ \text{क}, & \text{ख}-\text{अफि}, & \text{ग} \\ \text{ख}+\text{२अफि}, & \text{ग}, & \text{०} \end{vmatrix}$$

$= ४$ अ² फि² − अझाफि + छा $= ०$

२०३—आज कल प्रायः सर्वत्र नये गाणितिकों के ग्रन्थों में लाघव से मान दिखलाने के लिये कनिष्ठफल ही का व्यवहार विशेष रूप से रहता है । इसलिये इस अभ्यास में जहां तक हो सका है कुछ फैलाकर कनिष्ठफल के नियम और उदाहरण दिखलाए गए हैं । जितनी बातें इस विषय पर इस अध्याय में लिखी गई हैं उनको अच्छी तरह से सीखने से बुद्धिमान् कनिष्ठफल के विषय में पूर्ण निपुण हो जायगा और इस विषय पर अपने बुद्धिबल से भी अनेक कल्पना और उदाहरण करने की योग्यता सम्पादन कर सकेगा ।

बहुत से गाणितिक लोग इस पर हंसगे कि इस कनिष्ठ-फल के नियमों के बिना ही केवल गुणन, भागहार, और योग वियोग ही से सर्वत्र कार्य निर्वाह हो जाता है फिर कनिष्ठ फलों के नये नये संकेत और नियमों से क्या प्रयोजन, क्यों व्यर्थ ग्रन्थ बढ़ा कर समय नष्ट करना ।

इस पर इतना ही कहना पर्याप्त है कि इस गणित शास्त्र में जितने ही लाघव से गणित का कर्म हो उतनी ही क्रिया की प्रशंसा होती है । इसलिये गुणन, भजन में व्यर्थ जो काल और स्थान खराब होते हैं उसके स्थान में यदि ग्रन्थ में क्रिया की युक्ति दिखलाने के लिये कनिष्ठफल का ग्रहण किया जाय तो बहुत ही अल्प काल और अल्प स्थान में सब युक्तियाँ दिखलाई जा सकती हैं । भास्कराचार्य ने भी अपने बीज-गणित में लिखा है कि

"क्वचिदादेः क्वचिन्मध्यात्

क्वचिदन्ततात् क्रिया बुधैः।

आरभ्यते यथा लघ्वी

निर्वहेश्च तथा तथा॥"